УДК 512

Т. Р. Сейфуллин

Точечный комплекс Кошуля системы полиномов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Летичевским)

A pointed element of the Koszul complex of a system of polynomials is an analog of the pointed distribution depending on parameters.

В настоящей работе будем использовать определения и обозначения, данные в [1–6].

Соглашение 1. Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $\mathbf{A}$ — коммутативная алгебра над $\mathbf{R}$. Пусть $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{K}$ — модули над $\mathbf{R}$, $\psi\colon \mathcal{M}\times\mathcal{N}\to\mathcal{K}$ — билинейное над $\mathbf{R}$ отображение.

Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ являются модулями над $\mathbf{A}$, и имеет место $\psi(a\cdot\mathbf{m},\mathbf{n})=\psi(\mathbf{m},a\cdot\mathbf{n})$ для любых $a\in\mathbf{A}$, $\mathbf{m}\in\mathcal{M}$, $\mathbf{n}\in\mathcal{N}$, то отображение ψ назовем внутренне билинейным над $\mathbf{A}$.

Соглашение 2. Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей.

Пусть $\mathcal{K}$ — модуль над $\mathbf{R}$, $\mathcal{K}'\subseteq\mathcal{K}$. Под аддитивным замыканием $\mathcal{K}'$ будем понимать множество, полученное из множества, состоящего из нуля модуля $\mathcal{K}$ путем применений операции $P'=P\bigcup\{a+b\mid a\in P, b\in\mathcal{K}\}\bigcup\{a-b\mid a\in P,\ b\in\mathcal{K}\}$.

Пусть $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{K}$ — модули над $\mathbf{R}$, $\psi\colon \mathcal{M}\times\mathcal{N}\to\mathcal{K}$ — билинейное над $\mathbf{R}$ отображение, $\mathcal{M}'\subseteq\mathcal{M}$, $\mathcal{N}'\subseteq\mathcal{N}$. Под $\psi(\mathcal{M}',\mathcal{N}')$ будем понимать множество $\{\psi(\mathbf{m},\mathbf{n})\mid \mathbf{m}\in\mathcal{M}',\ \mathbf{n}\in\mathcal{N}'\}$, а не его аддитивное замыкание.

Определение 1. Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $x=(x_1,\dots,x_n)$ — набор полиномиальных переменных, $\widehat{f}=(\widehat{f}_1,\dots,\widehat{f}_s)$ — набор грассмановых переменных.

Обозначим $\mathbf{R}[x,\widehat{f}]\simeq\mathbf{R}[x]\otimes{}_{\mathbf{R}}\Lambda_{\mathbf{R}}(\widehat{f})$ градуированную коммутативную алгебру над $\mathbf{R}$ (см. [7, с. 230–232]) в которой порядок x_k равен 0, а порядок $\widehat{f}_i$ равен 1. Элементы $\mathbf{R}[x,\widehat{f}]$ будем обозначать $a(x,\widehat{f})$, где a — любая буква, порядок $a(x,\widehat{f})$ будем обозначать $|a|$.

Пусть $y=(y_1,\dots,y_m)$ — набор полиномиальных переменных, $\widehat{g}=(\widehat{g}_1,\dots,\widehat{g}_t)$ — набор грассмановых переменных, обозначим $\mathbf{R}[x,\widehat{f}][y,\widehat{g}]_*=\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}[y,\widehat{g}],\mathbf{R}[x,\widehat{f}])$ множество линейных над $\mathbf{R}$ отображений $\mathbf{R}[y,\widehat{g}]\to\mathbf{R}[x,\widehat{f}]$. Элементы $\mathbf{R}[x,\widehat{f}][y,\widehat{g}]_*$ будем обозначать $a(x,\widehat{f},y_*,\widehat{g}_*)$, где a — любая буква.

Обозначим $\mathbf{R}[y,\widehat{g}]_*=\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}[y,\widehat{g}],\mathbf{R})$ множество линейных над $\mathbf{R}$ отображений $\mathbf{R}[y,\widehat{g}]\to\mathbf{R}$. Элементы $\mathbf{R}[y,\widehat{g}]_*$ будем обозначать $a(y_*,\widehat{g}_*)$, где a — любая буква.

Под $\mathbf{R}[x][y]$ будем понимать кольцо полиномов от переменных $y=(y_1,\dots,y_m)$ с коэффициентами из $\mathbf{R}[x]$.

Под точечным подмодулем модуля $\mathbf{R}[x,\widehat{f}][y,\widehat{g}]_*$ ($\mathbf{R}[y,\widehat{g}]_*$) будем понимать точечный подмодуль модуля $\mathbf{R}[x,\widehat{f}][y,\widehat{g}]_*$ ($\mathbf{R}[y,\widehat{g}]_*$) как модуля над $\mathbf{R}[x][y]$ ($\mathbf{R}[y]$). Под точечным элементом модуля $\mathbf{R}[x,\widehat{f}][y,\widehat{g}]_*$ ($\mathbf{R}[y,\widehat{g}]_*$) будем понимать элемент, принадлежащий некоторому точечному подмодулю этого модуля.

Заметим, что если $y=()$, то $\mathbf{R}[x,\widehat{f}][y,\widehat{g}]_*=\mathbf{R}[x,\widehat{f}][\widehat{g}]_*$ ($\mathbf{R}[y,\widehat{g}]_*=\mathbf{R}[\widehat{g}]_*$) является точечным своим подмодулем как модуля над $\mathbf{R}[x][y]=\mathbf{R}[x][]\simeq\mathbf{R}[x]$ ($\mathbf{R}[y]=\mathbf{R}[]\simeq\mathbf{R}$), так как является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}[x]$ ($\mathbf{R}$). Тогда и любой элемент модуля $\mathbf{R}[x,\widehat{f}][\widehat{g}]_*$ ($\mathbf{R}[\widehat{g}]_*$) является точечным, так как $\mathbf{R}[x,\widehat{f}][\widehat{g}]_*$ ($\mathbf{R}[\widehat{g}]_*$) является своим точечным подмодулем.

Лемма 1. *Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей; пусть x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2 — наборы полиномиальных переменных.*

Пусть Λ' — модуль над $\mathbf{R}[x_1,x_2][y_1,y_2,z_1]$, Λ'' — модуль над $\mathbf{R}[x_2,x_3,y_1,y_2][z_2]$, Λ — модуль над $\mathbf{R}[x_1,x_2,x_3][y_1,z_1,z_2]$.

Пусть $\psi\colon \Lambda'\times\Lambda''\to\Lambda$ — билинейное над $\mathbf{R}$ отображение, линейное над $\mathbf{R}[x_1]$ по первому аргументу, билинейное над $\mathbf{R}[x_2]$, линейное над $\mathbf{R}[x_3]$ по второму аргументу, билинейное над $\mathbf{R}[y_1]$, внутренне билинейное над $\mathbf{R}[y_2]$, линейное над $\mathbf{R}[z_1]$ по первому аргументу, линейное над $\mathbf{R}[z_2]$ по второму аргументу. Тогда:

1) если $\mathcal{L}'$ — точечный подмодуль модуля Λ', $\mathcal{L}''$ — точечный подмодуль модуля Λ'', $\mathcal{L}$ — аддитивное замыкание $\psi(\mathcal{L}',\mathcal{L}'')$, то $\mathcal{L}$ является точечным подмодулем модуля Λ;

2) если l' — точечный элемент из Λ', l'' — точечный элемент из Λ'', то $\psi(l',l'')$ является точечным элементом из Λ.

Доказательство 1. Пусть $a(x_1,x_2,y_1,z_1)\in\mathbf{R}[x_1,x_2,y_1,z_1]$, тогда

$$a(x_1,x_2,y_1,z_1)\cdot\psi(\mathcal{L}',\mathcal{L}'')=\psi(a(x_1,x_2,y_1,z_1)\cdot\mathcal{L}',\mathcal{L}'')\subseteq\psi(\mathcal{L}',\mathcal{L}'').$$

Равенство следует из линейности отображения ψ над $\mathbf{R}[x_1,x_2,y_1,z_1]$ по первому аргументу. Включение следует из включения $a(x_1,x_2,y_1,z_1)\cdot\mathcal{L}'\subseteq\mathcal{L}'$, которое имеет место, так как $\mathcal{L}'$ является модулем над $\mathbf{R}[x_1,x_2][y_1,y_2,z_1]$. Следовательно, $\psi(\mathcal{L}',\mathcal{L}'')$ замкнуто относительно умножения на полиномы из $\mathbf{R}[x_1,x_2,y_1,z_1]$. Пусть $b(x_2,x_3,y_1,z_2)\in\mathbf{R}[x_2,x_3,y_1,z_2]$, тогда

$$b(x_2,x_3,y_1,z_2)\cdot\psi(\mathcal{L}',\mathcal{L}'')=\psi(\mathcal{L}',b(x_2,x_3,y_1,z_2)\cdot\mathcal{L}'')\subseteq\psi(\mathcal{L}',\mathcal{L}'').$$

Равенство следует из линейности отображения ψ над $\mathbf{R}[x_2,x_3,y_1,z_2]$ по второму аргументу. Включение следует из включения $b(x_2,x_3,y_1,z_2)\cdot\mathcal{L}''\subseteq\mathcal{L}''$, которое имеет место, так как $\mathcal{L}''$ является модулем над $\mathbf{R}[x_2,x_3,y_1,y_2][z_2]$. Следовательно, $\psi(\mathcal{L}',\mathcal{L}'')$ замкнуто относительно умножения на полиномы из $\mathbf{R}[x_2,x_3,y_1,z_2]$. Тогда $\mathcal{L}$ как аддитивное замыкание множества $\psi(\mathcal{L}',\mathcal{L}'')$ является модулем над $\mathbf{R}[x_1,x_2,y_1,z_1]$ и модулем над $\mathbf{R}[x_2,x_3,y_1,z_2]$, следовательно, является модулем над $\mathbf{R}[x_1,x_2,x_3][y_1,z_1,z_2]$.

Так как $\mathcal{L}'$ — точечный подмодуль модуля Λ', то он обладает конечной системой образующих $\{\lambda'_p\mid p\in P\}$ как модуль над $\mathbf{R}[x_1,x_2]$. Так как $\mathcal{L}''$ — точечный подмодуль модуля Λ'', то он обладает конечной системой образующих $\{\lambda''_q\mid q\in Q\}$ как модуль над $\mathbf{R}[x_2,x_3,y_1,y_2]$. $\mathcal{L}$ порождается аддитивно элементами вида $\psi(l',l'')$, где $l'\in\mathcal{L}'$, $l''\in\mathcal{L}''$. Тогда $l'=\sum\limits_p a^p(x_1,x_2)\cdot\lambda'_p$, $l''=\sum\limits_q\sum\limits_t b^q_t(x_3)\cdot c^q_t(x_2,y_1,y_2)\cdot\lambda''_q$, где $a^p(x_1,x_2)\in\mathbf{R}[x_1,x_2]$, $b^q_t(x_3)\in\mathbf{R}[x_3]$, $c^q_t(x_2,y_1,y_2)\in\mathbf{R}[x_2,y_1,y_2]$, сумма по t является конечной. Имеет место

$$\psi(l',l'')=\psi\left(\sum_p a^p(x_1,x_2)\cdot\lambda'_p,\sum_q\sum_t b^q_t(x_3)\cdot c^q_t(x_2,y_1,y_2)\cdot\lambda''_q\right)=$$
$$=\sum_p\sum_q\sum_t a^p(x_1,x_2)\cdot b^q_t(x_3)\cdot\psi(\lambda'_p\cdot c^q_t(x_2,y_1,y_2),\lambda''_q)=$$
$$=\sum_p\sum_q\sum_t a^p(x_1,x_2)\cdot b^q_t(x_3)\cdot\psi\left(\sum_r W^{qr}_{pt}(x_1,x_2)\cdot\lambda'_r,\lambda''_q\right)=$$
$$=\sum_p\sum_q\sum_t\sum_r a^p(x_1,x_2)\cdot b^q_t(x_3)\cdot W^{qr}_{pt}(x_1,x_2)\cdot\psi(\lambda'_r,\lambda''_q)=$$

$$= \sum_q \sum_r \left(\sum_p a^p(x_1, x_2) \cdot \left(\sum_t b_t^q(x_3) \cdot W_{pt}^{qr}(x_1, x_2) \right) \right) \cdot \psi(\lambda'_r, \lambda''_q).$$

Второе равенство следует из линейности над $\mathbf{R}[x_1, x_2]$ по первому аргументу, линейности над $\mathbf{R}[x_3]$ по второму аргументу и внутренней билинейности над $\mathbf{R}[x_2, y_1, y_2]$ отображения ψ. Далее, $\lambda'_p \cdot c_t^q(x_2, y_1, y_2) \in \mathcal{L}'$, так как $\lambda'_p \in \mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}'$ является модулем над $\mathbf{R}[x_1, x_2][y_1, y_2, z_1]$, тогда $\lambda'_p \cdot c_t^q(x_2, y_1, y_2) = \sum\limits_r W_{pt}^{qr}(x_1, x_2) \cdot \lambda'_r$, где $W_{pt}^{qr}(x_1, x_2) \in \mathbf{R}[x_1, x_2]$, так как $\{\lambda'_p \mid p \in P\}$ — система образующих $\mathcal{L}'$ как модуля над $\mathbf{R}[x_1, x_2]$. Четвертое равенство следует из линейности над $\mathbf{R}[x_1, x_2]$ по первому аргументу отображения ψ. В последнем выражении коэффициентом при $\psi(\lambda'_r, \lambda''_q)$ является полином из $\mathbf{R}[x_1, x_2, x_3]$, следовательно, $\mathcal{L}$ порождается конечной системой образующих $\{\psi(\lambda'_r, \lambda''_q) \mid r \in P, q \in Q\}$ как модуль над $\mathbf{R}[x_1, x_2, x_3]$, т. е. является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}[x_1, x_2, x_3]$. Таким образом, $\mathcal{L}$ является точечным подмодулем модуля Λ как модуля над $\mathbf{R}[x_1, x_2, x_3][y_1, z_1, z_2]$.

Доказательство 2. Так как l' — точечный элемент из Λ', то $l' \in \mathcal{L}'$, где $\mathcal{L}'$ — точечный подмодуль модуля Λ'; так как l'' — точечный элемент из Λ'', то $l'' \in \mathcal{L}''$, где $\mathcal{L}''$ — точечный подмодуль модуля Λ''. Пусть $\mathcal{L}$ — аддитивное замыкание $\psi(\mathcal{L}', \mathcal{L}'')$, тогда $\psi(l', l'') \in \psi(\mathcal{L}', \mathcal{L}'') \subseteq \mathcal{L}$. Поскольку в силу *1* леммы $\mathcal{L}$ является точечным подмодулем модуля Λ, то $\psi(l', l'')$ является точечным элементом $\mathcal{L}$.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей; пусть* x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2 *— наборы полиномиальных переменных и* $\widehat{f}_1$, $\widehat{f}_2$, $\widehat{f}_3$, $\widehat{g}_1$, $\widehat{g}_2$, $\widehat{g}_3$, $\widehat{g}_4$, $\widehat{g}_5$, $\widehat{g}_6$, $\widehat{h}_1$, $\widehat{h}_2$, $\widehat{h}_3$ *— наборы грассмановых переменных. Пусть*

$$\Lambda' = \mathbf{R}[x_1, x_2, \widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{g}_1, \widehat{g}_3, \widehat{g}_5][y_1, y_2, z_1, \widehat{g}_2, \widehat{g}_4, \widehat{g}_6, \widehat{h}_1, \widehat{h}_2]_*,$$

$$\Lambda'' = \mathbf{R}[x_2, x_3, y_1, y_2, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3, \widehat{g}_2, \widehat{g}_4, \widehat{g}_6][z_2, \widehat{g}_1, \widehat{g}_3, \widehat{g}_5, \widehat{h}_2, \widehat{h}_3]_*,$$

$$\Lambda = \mathbf{R}[x_1, x_2, x_3, \widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3, \widehat{g}_3, \widehat{g}_4][y_1, z_1, z_2, \widehat{g}_1, \widehat{g}_2, \widehat{h}_1, \widehat{h}_2, \widehat{h}_3]_*;$$

ψ *— отображение:*

$$\Lambda' \times \Lambda'' \ni (l', l'') \mapsto l(x_1, x_2, x_3, y_*^1, z_*^1, z_*^2, \widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3, \widehat{g}_3, \widehat{g}_4, \widehat{g}_*^1, \widehat{g}_*^2, \widehat{h}_*^1, \widehat{h}_*^2, \widehat{h}_*^3) =$$

$$= \underset{y_1}{\perp} \underset{y_2}{\top} \underset{\widehat{g}_1}{\perp} \underset{\widehat{g}_2}{\perp} \underset{\widehat{g}_*^3}{\perp} \underset{\widehat{g}_*^4}{\perp} \underset{\widehat{g}_5}{\top} \underset{\widehat{g}_6}{\top} l'(x_1, x_2, y_*^1, y_*^2, z_*^1, \widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{g}_1, \widehat{g}_3, \widehat{g}_5, \widehat{g}_*^2, \widehat{g}_*^4, \widehat{g}_*^6, \widehat{h}_*^1, \widehat{h}_*^2) \cdot$$

$$\cdot\, l''(x_2, x_3, y_1, y_2, z_*^2, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3, \widehat{g}_2, \widehat{g}_4, \widehat{g}_6, \widehat{g}_*^1, \widehat{g}_*^3, \widehat{g}_*^5, \widehat{h}_*^2, \widehat{h}_*^3).$$

Тогда:

1) если $\mathcal{L}'$ *— точечный подмодуль модуля* Λ', $\mathcal{L}''$ *— точечный подмодуль модуля* Λ'', *то аддитивное замыкание* $\psi(\mathcal{L}', \mathcal{L}'')$ *является точечным подмодулем модуля* Λ;

2) если l' *— точечный элемент из* Λ', l'' *— точечный элемент из* Λ'', *то* $\psi(l', l'')$ *является точечным элементом из* Λ.

Доказательство. Легко видеть, что Λ', Λ'', Λ, ψ удовлетворяют условиям леммы 1. Тогда из *1* леммы 1 следует *1* леммы, из *2* леммы 1 следует *2* леммы.

Дополнение к лемме 2. Если один из наборов переменных y_1, y_2, $\widehat{g}_1$, $\widehat{g}_3$, $\widehat{g}_4$, $\widehat{g}_5$, $\widehat{g}_6$ пустой, то соответствующая этому набору сверка среди сверток $\underset{y_1}{\perp}$, $\underset{y_2}{\top}$, $\underset{\widehat{g}_1}{\perp}$, $\underset{\widehat{g}_2}{\perp}$, $\underset{\widehat{g}_*^3}{\perp}$, $\underset{\widehat{g}_*^4}{\perp}$, $\underset{\widehat{g}_5}{\top}$, $\underset{\widehat{g}_6}{\top}$ в определении отображения ψ отсутствует. Если все эти наборы переменных пустые, то в определении отображения ψ сверки отсутствуют и оно является произведением.

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{R}$ — *коммутативное кольцо с единицей;* $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ — *наборы полиномиальных переменных;* $\widehat{f} = (\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_s)$, $\widehat{g} = (\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_t)$ — *наборы грассмановых переменных. Пусть* $a(x) \in \mathbf{R}[x]^m$, $b(x) \in \mathbf{R}[x]^{s\times t}$, *тогда* $\mathbf{1}_{(y,\widehat{g})}(a(x), \widehat{f}b(x))$ *является точечным.*

Доказательство. $\mathbf{1}_{(y,\widehat{g})}(a(x), \widehat{f}b(x))\cdot\mathbf{R}[x][y]$ является модулем над $\mathbf{R}[x][y]$ и является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}[x]$, ибо он порождается элементом $\mathbf{1}_{(y,\widehat{g})}(a(x), \widehat{f}b(x))$ как модуль над $\mathbf{R}[x]$, так как для любого $H(x,y) \in \mathbf{R}[x][y]$: $\mathbf{1}_{(y,\widehat{g})}(a(x), \widehat{f}b(x)) \cdot H(x,y) = \mathbf{1}_{(y,\widehat{g})}(a(x), \widehat{f}b(x)) \cdot H(x, a(x))$, а $H(x, a(x)) \in \mathbf{R}[x]$. Следовательно, $\mathbf{1}_{(y,\widehat{g})}(a(x), \widehat{f}b(x))$ является точечным.

Определение 2. Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей; x, y — наборы полиномиальных переменных, $z = (x,y)$; $\widehat{f} = (\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_s)$, $\widehat{g} = (\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_t)$ — наборы грассмановых переменных; $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_s(z))$, $g(z) = (g_1(z), \ldots, g_t(z))$ — полиномы из $\mathbf{R}[z]$.

Обозначим $\mathbf{C}(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$ множество $\mathbf{R}[x, \widehat{f}][y, \widehat{g}]_*$ с определенным на нем отображением $\partial\colon c(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*) \mapsto \partial[c(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)] = \underset{\widehat{f}_*}{\perp} f(z)\widehat{f}_* \cdot c(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*) - g(z)\widehat{g}_* \cdot c(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$. Имеет место $\partial.\partial = 0$, ∂ является однородным отображением порядка -1.

$\mathbf{C}(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$ является комплексом над $\mathbf{R}[x][y] \simeq \mathbf{R}[z]$, который называется комплексом Кошуля системы полиномов $f(z)$, $g(z)$ (см. [8, с. 157]).

$c(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$ назовем точечным, если он является точечным элементом $\mathbf{C}(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$ как модуля над $\mathbf{R}[x][y]$. Обозначим $\mathbf{C}^\bullet(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$ множество точечных элементов $\mathbf{C}(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$ как модуля над $\mathbf{R}[x][y]$.

Лемма 4. *Пусть имеют место условия определения 2. Тогда* $\mathbf{C}^\bullet(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$ *является подкомплексом комплекса* $\mathbf{C}(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$ *над* $\mathbf{R}[x][y] \simeq \mathbf{R}[z]$, *т. е.* $\mathbf{C}^\bullet(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$ *является подмодулем* $\mathbf{C}(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$ *как модуля над* $\mathbf{R}[x][y]$ *и если* $c(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$ — *точечный элемент из* $\mathbf{C}(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$, *то* $\partial[c(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)]$ *является точечным элементом.*

Доказательство. Поскольку отображение ∂ является линейным над $\mathbf{R}[x][y]$, то в силу леммы 5 из [6] $\mathbf{C}^\bullet(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$ является подкомплексом комплекса $\mathbf{C}(x, y_*, \widehat{f}, \widehat{g}_*)$ над $\mathbf{R}[x][y]$.

Определение 3. Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей; $y \simeq x' \simeq x = (x_1, \ldots, x_n)$ — наборы переменных; $\partial\colon \widehat{u} \mapsto (x - y)$, $\widehat{u}' \mapsto (x' - y)$.

Обозначим $\triangle_{(x',\widehat{u}')}(x, y, \widehat{u}) = \mathbf{1}_{(x',\widehat{u}')}(x, \widehat{u}) - \mathbf{1}_{(x',\widehat{u}')}(y, \widehat{0})$.

Обозначим $\nabla_{(x',\widehat{u}')}(x, y, \widehat{u})$ такой элемент $\mathbf{C}(x, y, \widehat{u}; x'_*, \widehat{u}'_*)$, что имеет место

$$\partial[\nabla_{(x',\widehat{u}')}(x, y, \widehat{u})] = \triangle_{(x',\widehat{u}')}(x, y, \widehat{u})$$

и назовем его точечным оператором разностной гомотопии, если он является точечным.

Лемма 5. *Пусть имеют место условия определения 3. Тогда* $\triangle_{(x',\widehat{u}')}(x, y, \widehat{u})$ *является точечным и существует точечный оператор разностной гомотопии* $\nabla_{(x',\widehat{u}')}(x, y, \widehat{u})$. *Например, таким оператором является*

$$\nabla_{(x',\widehat{u}')}(x, y, \widehat{u}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - y_k} \cdot \widehat{u}_k \cdot \triangle^k_{(x',\widehat{u}')}(x, y, \widehat{u}),$$

где

$$\triangle^k_{(x',\widehat{u}')}(x, y, \widehat{u}) = \mathbf{1}_{(x',\widehat{u}')}(y_{<k}, x_k, x_{>k}, \widehat{0}_{<k}, \widehat{u}_k, \widehat{u}_{>k}) - \mathbf{1}_{(x',\widehat{u}')}(y_{<k}, y_k, x_{>k}, \widehat{0}_{<k}, \widehat{0}_k, \widehat{u}_{>k}).$$

Доказательство. В силу леммы 3

$$\mathbf{1}_{(x',\widehat{u}')}(y_{<k}, x_k, x_{>k}, \widehat{0}_{<k}, \widehat{u}_k, \widehat{u}_{>k}) \qquad \text{и} \qquad \mathbf{1}_{(x',\widehat{u}')}(y_{<k}, y_k, x_{>k}, \widehat{0}_{<k}, \widehat{0}_k, \widehat{u}_{>k})$$

являются точечными, следовательно, и $\triangle^k_{(x',\widehat{u}')}(x,y,\widehat{u})$, как их разность, в силу *2* леммы 2 из [6] является точечным, он аннулирует $(I(x,y,x'))_{x,y,x'}$, где $I(x,y,x') = \{(x'_k - x_k)\cdot(x'_k - y_k) \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}$. Тогда оператор $\frac{1}{x_k - y_k}\cdot \widehat{u}_k \cdot \triangle^k_{(x',\widehat{u}')}(x,y,\widehat{u})$ тоже аннулирует $(I(x,y,x'))_{x,y,x'}$, следовательно, он является точечным в силу леммы 3 из [6], так как $\mathbf{R}[x,y][x']/(I(x,y,x'))_{x,y,x'}$ является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}[x,y]$. Тогда и оператор $\nabla_{(x',\widehat{u}')}(x,y,\widehat{u})$, будучи их суммой, в силу *2* леммы 2 из [6] является точечным, он аннулирует $(I(x,y,x'))_{x,y,x'}$. В доказательстве леммы из [1, с. 45] показано, что $\nabla_{(x',\widehat{u}')}(x,y,\widehat{u})$ является оператором разностной гомотопии.

Вывод. Из лемм 2–4 следует, что во всех утверждениях работ [1–5], если исходные элементы дуальных комплексов Кошуля (т. е. вида $\mathbf{C}(x_*,\widehat{f}^x_*)$) являются точечными, то и все другие встречающиеся элементы комплексов Кошуля являются точечными, в том числе элементы дуальных комплексов Кошуля. Из леммы 5 также следует, что если в утверждениях имеются равенства вида $c_1 - c_2 = \partial[C]$, то в них C является точечным, так как они получаются с применением разностной гомотопии $\nabla_{(x',\widehat{u}')}(x,y,\widehat{u})$ (теорема из [1, с. 47]).

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— поле,* $x = (x_1,\ldots,x_n)$ *— переменные,* $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_s(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$, $\partial\colon \widehat{f}_x \mapsto f(x)$. *Пусть* $c(x_*,\widehat{f}^x_*) \in \mathbf{Z}(x_*,\widehat{f}^x_*)$ *— точечный.*

Тогда либо $c(x_*,\widehat{f}^x_*) = \partial[b(x_*,\widehat{f}^x_*)]$, *где* $b(x_*,\widehat{f}^x_*) \in \mathbf{C}(x_*,\widehat{f}^x_*)$ *— точечный; либо существует точечный* $c'(x_*,\widehat{f}^x_*) \in \mathbf{Z}(x_*,\widehat{f}^x_*)$ *такой, что имеет место* $c(x_*,\widehat{f}^x_*) - c'(x_*,\widehat{f}^x_*) = \partial[b(x_*,\widehat{f}^x_*)]$, *где* $b(x_*,\widehat{f}^x_*) \in \mathbf{C}(x_*,\widehat{f}^x_*)$ *— точечный и для всех* $i = 1,s$: $c'(x_*,\widehat{f}_*)\cdot f_i(x)^{\delta_i} = \widehat{0}_*$ *для некоторого* $\delta_i \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть $f = (f_1,\ldots,f_s)$ — полиномиальные переменные. Так как косизигия $c(x_*,\widehat{f}^x_*)$ является точечной, то она принадлежит подмодулю $\mathcal{L}(x_*,\widehat{f}^x_*)$ модуля $\mathbf{C}^r(x_*,\widehat{f}^x_*)$ над $\mathbf{R}[x]$, который является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$. В силу *1* леммы 1 из [6] существует $T_i(f_i) \in \mathbf{R}[f_i]$ такой, что $T_i(f_i(x))\cdot\mathcal{L}(x_*,\widehat{f}^x_*) = \{\widehat{0}_*\}$, тогда $T_i(f_i(x))\cdot c(x_*,\widehat{f}^x_*) = \widehat{0}_*$.

Пусть для некоторого i имеет место $T_i(0) \neq 0$, тогда $1 = f_i\cdot P_i(f_i) + T_i(f_i)\cdot Q_i$, где $Q_i = T_i(0)^{-1}$ и $P_i(f_i) = -Q_i\cdot(T_i(f_i) - T_i(0))/f_i \in \mathbf{R}[f_i]$. Тогда имеет место $c(x_*,\widehat{f}^x_*) = 1\cdot c(x_*,\widehat{f}^x_*) = f_i(x)\cdot P_i(f_i(x))\cdot c(x_*,\widehat{f}^x_*) + T_i(f_i(x))\cdot Q_i\cdot c(x_*,\widehat{f}^x_*) = \partial[b(x_*,\widehat{f}^x_*)] + \widehat{0}_*$, где $b(x_*,\widehat{f}^x_*) = \widehat{f}_{i,x}\cdot P_i(f_i(x))\cdot c(x_*,\widehat{f}^x_*)$, при этом в силу леммы 6 из [6] $b(x_*,\widehat{f}^x_*)$ является точечным, так как $c(x_*,\widehat{f}^x_*)$ является точечным, третье равенство имеет место, так как $T_i(f_i(x))\cdot c(x_*,\widehat{f}^x_*) = \widehat{0}_*$.

Пусть для всех i: $T_i(0) = 0$, тогда $T_i(f_i) = (f_i)^{\delta_i}\cdot T'_i(f_i)$, где $\delta_i \geqslant 1$ и $T'_i(0) \neq 0$. Так как $(f_i)^{\delta_i}$ и $T'_i(f_i)$ не имеют общих корней, то $1 = (f_i)^{\delta_i}\cdot P_i(f_i) + T'_i(f_i)\cdot Q_i(f_i)$, где $P_i(f_i)$, $Q_i(f_i) \in \mathbf{R}[f_i]$. Обозначим $\mathcal{E}_i(x) = T'_i(f_i(x))\cdot Q_i(f_i(x))$, тогда $1 - \mathcal{E}_i(x) = (f_i)^{\delta_i}\cdot P_i(f_i) = \partial[\widehat{f}_{i,x}\cdot(f_i(x))^{\delta_i - 1}\cdot P_i(f_i(x))] \overset{\partial}{\simeq} 0$ в $\mathbf{C}(x,\widehat{f}_x)$, т. е. $\mathcal{E}_i(x) \overset{\partial}{\simeq} 1$ в $\mathbf{C}(x,\widehat{f}_x)$, и $(f_i(x))^{\delta_i}\cdot\mathcal{E}_i(x) = (f_i(x))^{\delta_i}\cdot T'_i(f_i(x))\cdot Q_i(f_i(x)) = T_i(f_i(x))\cdot Q_i(f_i(x))$; здесь $\delta_i - 1 \geqslant 0$, так как $\delta_i \geqslant 1$. Положим $\mathcal{E}(x) = \prod\limits_{j=1}^{s}\mathcal{E}_j(x)$, тогда $\mathcal{E}(x) \overset{\partial}{\simeq} 1$ в $\mathbf{C}(x,\widehat{f}_x)$, т. е. $1 - \mathcal{E}(x) = \partial[a(x,\widehat{f}_x)]$, где $a(x,\widehat{f}_x) \in \mathbf{C}_1(x,\widehat{f}_x)$, и $(f_i(x))^{\delta_i}\cdot\mathcal{E}(x) = (f_i(x))^{\delta_i}\cdot\prod\limits_{j=1}^{s}\mathcal{E}_j(x) = (f_i(x))^{\delta_i}\cdot\mathcal{E}_i(x)\cdot H_i(x) = T_i(f_i(x))\cdot Q_i(f_i(x))\cdot H_i(x) = T_i(f_i(x))\cdot S_i(x)$, где $S_i(x)$, $H_i(x) \in \mathbf{R}[x]$. Положим $c'(x_*,\widehat{f}^x_*) = \mathcal{E}(x)\cdot c(x_*,\widehat{f}^x_*)$. Тогда имеет место $c(x_*,\widehat{f}^x_*) - c'(x_*,\widehat{f}^x_*) = (1 - \mathcal{E}(x))\cdot c(x_*,\widehat{f}^x_*) = \partial[a(x,\widehat{f}_x)]\cdot c(x_*,\widehat{f}^x_*) = \partial[b(x_*,\widehat{f}^x_*)]$, где $b(x_*,\widehat{f}^x_*) = a(x,\widehat{f}_x)\cdot c(x_*,\widehat{f}^x_*)$, при этом в силу леммы 6 из [6] $b(x_*,\widehat{f}^x_*)$ является точечным, так как $c(x_*,\widehat{f}^x_*)$ является точечным. Кроме того, имеет место $(f_i(x))^{\delta_i}\cdot c'(x_*,\widehat{f}^x_*) = (f_i(x))^{\delta_i}\cdot\mathcal{E}(x)\cdot c(x_*,\widehat{f}^x_*) = T_i(f_i(x))\cdot S_i(x)\cdot c(x_*,\widehat{f}^x_*) = \widehat{0}_*$, так как $T_i(f_i(x))\cdot c(x_*,\widehat{f}^x_*) = \widehat{0}_*$.

1. *Сейфуллин Т. Р.* Гомологии комплекса Кошуля системы полиномиальных уравнений // Доп. НАН України. – 1997. – № 9. – С. 43–49.
2. *Сейфуллин Т. Р.* Комплексы Кошуля систем полиномов, связанных линейной зависимостью // Некоторые вопросы современной математики. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С. 326–349.
3. *Сейфуллин Т. Р.* Комплексы Кошуля вложенных систем полиномов и двойственность // Доп. НАН України. – 2000. – № 6. – С. 26–34.
4. *Сейфуллин Т. Р.* Идемпотентные косизигии системы полиномов // Там само. – 2006. – № 3. – С. 22–28.
5. *Сейфуллин Т. Р.* Двойственность в комплексе Кошуля на изолированной 0-мерной компоненте многообразия корней // Там само. – 2006. – № 4. – С. 16–21.
6. *Сейфуллин Т. Р.* Точечные косизигии системы полиномов // Там само. – 2007. – № 10. – С. 27–32.
7. *Маклейн С.* Гомология. – Москва: Мир, 1966. – 543 с.
8. *Бурбаки Н.* Алгебра. Гомологическая алгебра. – Москва: Наука, 1987. – 182 с.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 19.10.2006

УДК 517.5

Член-кореспондент НАН України $\boxed{\textbf{О. І. Степанець}}$, **А. С. Сердюк, А. Л. Шидліч**

Про деякі нові критерії нескінченної диференційовності періодичних функцій

The set of $\mathcal{D}^\infty$ of infinitely differentiable periodic functions is studied in terms of generalized $\overline{\psi}$-derivatives defined by a pair $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ of sequences ψ_1 and ψ_2. It is established that every function f from the set $\mathcal{D}^\infty$ has at least one such derivative whose parameters ψ_1 and ψ_2 decrease faster than any power function. For an arbitrary function from $\mathcal{D}^\infty$ different from a trigonometric polynomial, there exists a pair ψ having the parameters ψ_1 and ψ_2 with the same properties, for which the $\overline{\psi}$-derivative already does not exist. On the basis of the proved statements, a number of criteria for a function to belong to the set $\mathcal{D}^\infty$ is given.

Нехай L — простір інтегровних 2π-періодичних функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) -$$

ряд Фур'є функції f. Нехай, далі, $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей таких, що $\psi^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)} A_k(f; x) - \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)} \widetilde{A}_k(f; x)\right), \tag{1}$$

де $\widetilde{A}_k(f; x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$, є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то φ називають $\overline{\psi}$-похідною функції f і записують $\varphi(\cdot) = D^{\overline{\psi}}(f; \cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$.