На підставі теорем 1 та 2 отримуємо аналоги співвідношень (2) і (3):

$$\mathcal{D}^\infty = \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}^\infty} C^{\overline{\psi}} = \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}^\mathcal{A}} C^{\overline{\psi}} = \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}'_\infty} C^{\overline{\psi}} = \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}^+_\infty} C^{\overline{\psi}}$$

і

$$\bigcap_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}^\infty} (\mathcal{D}^\infty \bigcap C^{\overline{\psi}}) = \bigcap_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}^\mathcal{A}} (\mathcal{D}^\infty \bigcap C^{\overline{\psi}}) = \bigcap_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}'_\infty} (\mathcal{D}^\infty \bigcap C^{\overline{\psi}}) = \bigcap_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}^+_\infty} (\mathcal{D}^\infty \bigcap C^{\overline{\psi}}) = \mathcal{T}.$$

Таким чином, весь спектр 2π-періодичних нескінченно диференційовних функцій можна проранжувати за допомогою їх $\overline{\psi}$-похідних, причому пари $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ досить вибирати так, щоб функції $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ належали до однієї з множин $\mathfrak{M}^+_\infty$, $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^\mathcal{A}$ або $\mathfrak{M}^\infty$. Нерозрізненними при такій класифікації залишаються тільки тригонометричні поліноми.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Тр. Ин-та математики НАН Украины. Т. 40. – Киев, 2002. – Ч. 1. – 427 с.
3. *Степанец А. И.* Несколько утверждений для выпуклых функций // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 688–702.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 16.05.2007

УДК 517.95

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко**

Об одной проблеме Стефана

By using the variational method, we study a nonlinear thermophysical problem with a free boundary. It is proved that an approximate solution based on the Ritz method tends to the exact one in a certain metric.

1. Постановка двухфазной стационарной задачи Стефана. Пусть $D = \{-1 < x < 1,\ H < y < 0\}$ обозначает полосу. Обозначим через γ кривую, отделяющую жидкую фазу D^+_γ от твердой фазы D^-_γ, при этом концы y лежат на вертикалях $x = \pm 1$. Будем считать, что температурное поле монотонно убывает вместе с вертикальной координатой y. Таким образом, в нижней части полосы будет расположена твердая фаза, а в верхней — жидкая. Обе области D^+_γ и D^-_γ предполагаются односвязными и симметричными относительно оси y.

Рассматривается задача. Требуется определить тройку $(u^\pm(x,y), \gamma)$ по следующим условиям:

$$\frac{\partial^2 u^\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^\pm}{\partial y^2} = 0, \qquad (x,y) \in D^\pm_\gamma, \tag{1}$$

$$u^+(x,0) = v, \qquad v = \text{const} > 1; \qquad u^-(x,H) = 0, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$

$$u_x^{\pm}(x,y)+\omega_0^{\pm}u^{\pm}(x,y)=0, \qquad x=\pm 1, \qquad (x,y)\in \partial D_\gamma^{\pm}, \tag{3}$$

$$u^{\pm}(x,y)=1; \quad |\nabla u^-|^2-\kappa^2|\nabla u^+|^2=0, \quad \kappa=\mathrm{const}, \quad 0<\kappa\leqslant 1, \quad (x,y)\in\gamma. \tag{4}$$

Задача (1)–(4) была рассмотрена в работе [1]. Из результатов работы следует, что эта задача имеет, и притом единственное, классическое решение в классе функций $u_y^+>0$, $u_y^->0$ соответственно в D_γ^+ и D_γ^-. При этом граница γ является аналитической кривой, монотонно возрастающей в правой половине, а функции $u^+(x,y)$, $u^-(x,y)$ непрерывны в $\overline{D_\gamma^+}$ и $\overline{D_\gamma^-}$ соответственно и непрерывно дифференцируемы всюду, за исключением угловых точек.

2. Построение приближенного решения вариационным методом. Задача (1)–(4) эквивалентна проблеме минимума следующего интегрального функционала:

$$I(u^+,u^-,\gamma)=\iint\limits_{D_\gamma^-}[{u_x^-}^2+{u_y^-}^2]dxdy+\kappa^2\iint\limits_{D_\gamma^+}[{u_x^+}^2+{u_y^+}^2]dxdy+$$

$$+\kappa^2\omega_0^+\int\limits_{\Gamma_\gamma^+}[{u^+}^2-1]dy+\omega_0^-\int\limits_{\Gamma_\gamma^-}[{u^-}^2-1]dy \tag{5}$$

на соответствующем множестве допустимых функций [2], здесь $\Gamma_\gamma^+=\partial D_\gamma^+\bigcap\{x=\pm1\}$, $\Gamma_\gamma^-=\partial D_\gamma^-\bigcap\{x=\pm1\}$. Следуя методике Фридрихса [3], представим функционал (5) в классе функций $u_y^{\pm}>0$ в $D_\gamma^{\pm}$ следующим образом:

$$I_1(y_1,y_2)=\iint\limits_{\Delta_1}\frac{1+y_{1x}^2}{y_{1u}}dxdu+\kappa^2\iint\limits_{\Delta_2}\frac{1+y_{2x}^2}{y_{2u}}dxdu+\omega_0^+\kappa^2\int\limits_1^v(u^2-1)[y_{2u}(1,u)+$$

$$+y_{2u}(-1,u)]du+\omega_0^-\int\limits_0^1(u^2-1)[y_{1u}(1,u)+y_{1u}(-1,u)]du, \tag{6}$$

где $\Delta_1=(-1<x<1, 0<u<1)$, $\Delta_2=(-1<x<1, 1<u<v)$, $y_1(x,u)$, $y_2(x,u)$ — решения уравнений $u_1(x,y)-u_1=0$, $u_2(x,y)-u_2=0$ [3]. Функционал (5) будем минимизировать на множестве допустимых функций

$$\Omega=\Omega_1\oplus\Omega_2, \tag{7}$$

где

$$\Omega_1=\{y_1(x,u)\colon y_1(x,u)\in C^1(\overline{\Delta}_1),\ \min_{(x,u)\in\overline{\Delta}_1}y_{1u}>0,\ y_1(x,0)=H,\ y_1(x,1)=y_2(x,1)\},$$

$$\Omega_2=\{y_2(x,u)\colon y_2(x,u)\in C^1(\overline{\Delta}_2),\ \min_{(x,u)\in\overline{\Delta}_2}y_{2u}>0,\ y_2(x,v)=0,\ y_1(x,1)=y_2(x,1)\}.$$

Далее, пусть функции $y_1^*(x,u)$, $y_2^*(x,u)$ соответствуют классическому решению (u^+,u^-,γ) задачи (1)–(4). Очевидно, что пара функций y_1^*, y_2^* доставляет наименьшее значение функционалу (6) на множестве (7). Будем минимизировать функционал (6) на множестве (7) при помощи сумм

$$
\begin{aligned}
&y_{1n}(x,u;a_{\kappa j}) = y_{1n}(x,u) = \sum_{j=0}^{L}\sum_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j}x^{2j}u^{\kappa} + H, \qquad (x,u)\in\overline{\Delta}_1,\\
&y_{2n}(x,u;b_{\kappa j}) = y_{2n}(x,u) = \frac{v-u}{v-1}\sum_{j=0}^{L}\sum_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j}x^{2j}u^{\kappa}, \qquad (x,u)\in\overline{\Delta}_2,\\
&n = \sup_{0\leqslant j\leqslant L}\{2j+T_j; 2j+\Theta_j\}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Включение $(y_{1n}, y_{2n}) \in \Omega$ выделяет в евклидовом пространстве E_r коэффициентов $(a_{kj}; b_{kj})$ область допустимости Ω_r, где

$$
r = \sum_{j=0}^{L}(T_j+\Theta_j+1), \qquad \Omega_r = \widetilde{\Omega}_1 \oplus \widetilde{\Omega}_2 \bigcap E^0,
$$

$$
\widetilde{\Omega}_1 = \{a_{\kappa j}\colon \min_{(x,u)\in\overline{\Delta}_1} y_{1nu} > 0\}, \qquad \widetilde{\Omega}_2 = \{b_{\kappa j}\colon \min_{(x,u)\in\overline{\Delta}_2} y_{2nu} > 0\},
$$

при этом коэффициенты (a_{kj}, b_{st}) должны лежать в гиперплоскостях

$$
E_0^0: \quad H + \sum_{\kappa=1}^{T_0} a_{\kappa 0} = \sum_{\kappa=0}^{\Theta_0} b_{\kappa 0}, \qquad E_j^0: \quad \sum_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j} = \sum_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j},
$$

т. е. $E^0 = E_0^0 \oplus E_1^0 \oplus \ldots \oplus E_L^0$ [2].

Неизвестные коэффициенты (a_{kj}, b_{st}) и множитель Лагранжа λ_t определяются из нелинейной системы Ритца:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial I_2(a_{\kappa j}, b_{\kappa j})}{\partial a_{pq}} + \lambda_q = 0, \qquad p = 1,2\ldots,T_q; \qquad q = 0,1,\ldots,L,\\
&\frac{\partial I_2(a_{\kappa j}, b_{\kappa j})}{\partial b_{st}} - \lambda_t = 0, \qquad s = 0,1\ldots,\Theta_t; \qquad t = 0,1,\ldots,L,\\
&\sum_{\kappa=1}^{T_0} a_{\kappa 0} - \sum_{\kappa=0}^{\Theta_0} b_{\kappa 0} + H = 0, \qquad \sum_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j} - \sum_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j} = 0, \qquad j = 1,2,\ldots,L,\\
&I_2(a_{\kappa j}, b_{\kappa j}) = I_1\left(\sum_{j=0}^{L}\sum_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j}x^{2j}u^{\kappa} + H;\ \frac{v-u}{v-1}\sum_{j=0}^{L}\sum_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j}x^{2j}u^{\kappa}\right).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Можно установить, что функция $I_2(a_{kj}, b_{kj})$ принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке (a^*_{kj}, b^*_{kj}) множества Ω_r, лежащей на конечном расстоянии от начала координат пространства E_r [4]. Следовательно, в точке (a^*_{kj}, b^*_{kj}) частные производные первого порядка соответствующей функции Лагранжа обращаются в ноль. Таким образом, система уравнений (9) имеет решение.

Итак, решив систему уравнений (9) при каждом n, можно затем построить последовательность приближений (8) в виде $y_{1n}(x,u;a^*_{kj}) = y^*_{1n}$, $y_{2n}(x,u;b^*_{kj}) = y^*_{2n}$.

Приближения y^*_{1n}, y^*_{2n}, построенные по методу Ритца, образуют минимизирующую последовательность для функционала (6) на множестве (7) [4]. Решения системы Ритца $a_{kj}(\omega_0^+,\omega_0^-,\kappa)$, $b_{kj}(\omega_0^+,\omega_0^-,\kappa)$ непрерывно зависят от параметров ω_0^+, ω_0^-, κ в некоторой окрестности точки $(\widetilde{\omega}_0^+,\widetilde{\omega}_0^-,\widetilde{\kappa})$, где разрешима система Ритца. Сходимость приближений Ритца исследована в [3].

3. Постановка однофазной квазистационарной задачи типа Стефана. Пусть γ — достаточно гладкая кривая с концами, расположенными на прямых $x = \pm 1$, $-\infty < y \leqslant \leqslant 0$. Требуется определить односвязную область $D_\gamma \subset D$, расположенную ниже "свободной границы" γ, определенную в ней функцию $u(x,y)$ по следующим условиям: функция $u(x,y)$ в области D_γ удовлетворяет в классическом смысле уравнению: 1) $\Delta u + \omega u_y = 0$, $(x,y) \in D_\gamma$, она непрерывна в $\overline{D}_\gamma$, непрерывно дифференцируема в $\overline{D}_\gamma$, исключая, может быть, угловые точки, и удовлетворяет условиям: 2) $u(x,y) = 1$, $(x,y) \in \gamma$; 3) $u_x \pm \omega_0 u = 0$, $x = \pm 1$, $(x,y) \in \partial D_\gamma \setminus \gamma$; 4) $u(x,-\infty) = 0$; 5) $|\nabla u| = Q(x,y)$, $(x,y) \in \gamma$; здесь ω и ω_0 — числа Пекле и Нуссельта.

4. Вариационная природа квазистационарной задачи типа Стефана. Рассмотрим функционал

$$J(u,\gamma) = \iint\limits_{D_\gamma} e^{\omega y}(|\nabla u|^2 + Q^2(x,y))dxdy + \omega_0 \int\limits_{\partial D_\gamma \setminus \gamma} e^{\omega y} u^2 dy \tag{10}$$

на соответствующем множестве допустимых функций [5]. Справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть $Q(x,y)$ — аналитическая функция по переменным x, y в D и пусть выполнены условия*

$$Q(x,y) = Q(-x,y), \qquad x \geqslant 0, \qquad Q_x(x,y) \leqslant 0, \qquad Q_y(x,y) \geqslant 0, \qquad (x,y) \in D,$$

$$\widehat{C}_0 \omega \exp(\mu_0 y) \leqslant Q(x,y) \leqslant \widehat{C}_1 \omega \exp(\mu_0 y), \qquad (x,y) \in D,$$

где

$$\begin{gathered}
\widehat{C}_0 = \mathrm{const} > 0, \quad \widehat{C}_1 = \mathrm{const} > 0, \quad \mu_0 = -\frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + \lambda_0^2}, \quad \lambda_0 = \omega_0 \operatorname{ctg} \lambda_0, \\
\omega_0 \geqslant \omega\sqrt{2} tg \omega\sqrt{2}, \qquad \omega < C_0\sqrt{\omega_0}, \qquad C_0\omega_0 < 2\widehat{C}_1\omega, \\
\omega_0 < \rho\omega^{4/3}, \qquad 0 < \omega_0 \leqslant A \leqslant \frac{\pi^2}{16}, \\
C_0 = (1-A)\cos^2\sqrt{A}, \qquad \rho = \left(2\frac{\widehat{C}_0}{C_1 e^2}\right)^{2/3}, \qquad C_1 = \frac{6 + A(1+\cos^2\sqrt{A})}{3(1+\cos^2\sqrt{A})}.
\end{gathered} \tag{11}$$

Тогда существует классическое решение (u,γ) задачи, удовлетворяющее условиям 1–5. При этом γ — монотонная дуга, аналитическая в окрестности каждой своей внутренней точки; $u(x,y)$ — функция, четная по x, $u_y > 0$ в D_γ, $u_x \leqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $(x,y) \in D_r$.

5. Построение приближений Ритца. Функционал (10) в классе функций $u_y > 0$ в D_γ можно представить следующим образом:

$$\bar{I}(w) = \frac{1}{\omega}\iint\limits_{\Delta}\left(w_x^2 + \omega^2 w^2 + w_u^2 Q^2\left(x, \frac{1}{\omega}\ln w\right)\right)\frac{dxdu}{w_u} +$$

$$+ \frac{\omega_0}{\omega}\int\limits_0^1 u^2(w_u(1,u) + w_u(-1,u))du, \tag{12}$$

где $\Delta = (-1 < x < 1,\ 0 < u < 1)$, $w(x,u) = \exp(\omega y(x,u))$, $(x,y) \in \overline{\Delta}$, $y(x,u)$ — решение уравнения $u(x,y) - u = 0$.

Рассмотрим теперь задачу о минимуме функционала (12) на множестве

$$\Omega_w = \{w\colon w \in C(\overline{\Delta})\bigcap C^1(\Delta + l),\ w(1,1) = 1,\ f_1(w) \geqslant 0,\ f_2(w) \leqslant 0,$$
$$f_3(w) \leqslant 0,\ f_4(w) \leqslant 0\}, \tag{13}$$

$$f_1(w) = \inf_{(x,u)\in\overline{\Delta}}[w_u(x,u) - \alpha], \quad f_2(w) = \max_{(x,u)\in\overline{\Delta}}[w(x,u) - \beta u^{\omega/\mu_0}], \quad l = \partial\Delta - \{u \equiv 0\},$$

$$f_3(w) = \sup_{(x,u)\in\overline{\Delta}}[w_u(x,u) - \kappa u^{(\omega/\mu_0 - 1)}], \qquad f_4(w) = \sup_{(x,u)\in\overline{\Delta}}[|w_x(x,u)| - \tau u^{\omega/\mu_0}].$$

Будем минимизировать функционал (12) на множестве (13) при помощи сумм

$$\overset{(n)}{w}(x,u;a_{kj}) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}x^{2j}u^k, \qquad n = \sup_{k=1,2,\ldots,m}(k + 2m_k).$$

Неизвестные коэффициенты $\{a_{kj}\}$ определяются методом Ритца. Доказывается сходимость приближений Ритца к точному решению $w(x,u) = \exp(\omega y(x,u))$, $(x,u) \in \overline{\Delta}$ в $C(\overline{\Delta}_\lambda)$, $\Delta_\lambda = (-1 < x < 1,\ 0 < \lambda < 1)$, $\lambda \in (0,1)$.

Замечание. Пусть функция $Q(x,y;v)$ зависит от управления $v \in U$ и пусть γ_0 — заданная допустимая кривая. Рассмотрим функционал $F(v) = \rho^2(\gamma(v);\gamma_0)$, где $\rho(\gamma_1,\gamma_2)$ — функция расстояния. Можно доказать существование оптимального управления, когда U замкнуто и компактно [7]. В качестве U можно взять ограниченное множество ступенчатых функций с фиксированным числом ступенек.

1. *Базалий Б. В., Шелепов В. Ю.* Об одной стационарной задаче Стефана // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1974. – № 1. – С. 5–8.
2. *Миненко А. С.* Об одной оптимизационной задаче // Мат. физика. – 1978. – Вып. 23. – С. 74–77.
3. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 354 с.
4. *Миненко А. С.* Осесимметричное течение со свободной границей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 477–487.
5. *Миненко А. С.* Об одной теплофизической задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер А. – 1979. – № 6. – С. 413–416.
6. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Там же. – 1978. – № 4. – С. 291–294.
7. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* Об одной оптимизационной задаче со свободной границей // Там же. – 1976. – № 5. – С. 389–392.

Институт проблем искусственного интеллекта
НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 17.04.2007