Не приводя числовых вычислений для СВВ с УЭВ 20/5000, запас устойчивости по фазе определим в виде 69°, что позволяет обеспечивать регулирование частоты в дорезонансной области без потери устойчивости СВВ.

Для расширения частотного диапазона СВВ с УЭВ 20/5000 было введено в систему звено — фильтр, передаточная функция которого представляет собой обратную характеристику резонансной части СВВ, т. е. своеобразный фильтр-пробку на резонансной частоте СВВ.

Скорректированная по фазе СВВ обеспечила проведение виброиспытаний изделий как по методу качающей частоты, так и при воспроизведении СВВ стохастических вибраций.


1. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
2. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. – Москва: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1956. – 608 с.
3. *Фельдбаум А. Л., Дудыкин А. Д., Мановцев А. П. и др.* Теоретические основы связи и управления. – Москва: Физматгиз, 1963. – 932 с.
4. *Божко А. Е.* Воспроизведение вибраций. – Киев: Наук. думка, 1975. – 191 с.



*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*



*Поступило в редакцию 30.01.2007*



УДК 536.24





Академик НАН Украины **И. В. Сергиенко,** академик НАН Украины **В. С. Дейнека**


# Идентификация параметров многокомпонентных стержневых систем


*We present a procedure of the construction of computational algorithms for solving the problems of identification of the parameters of multicomponent framed structures. The explicit formulas for Gâteaux derivatives used in the construction of gradient computational algorithms are obtained.*


Теория оптимального управления состояниями многокомпонентных распределенных систем [1–3] позволяет на основании решений прямых и соответствующих сопряженных задач получать явные выражения дифференциалов Гато квадратичных функционалов качества при различных (в том числе и комбинированных) способах наблюдений. Эта особенность, ранее установленная в работе [4] для однородных систем, авторами работы [5] использована для построения градиентных методов идентификации параметров однородных параболических систем.

В данной работе на основании результатов работ [1–3, 5] предложены вычислительные алгоритмы градиентных методов идентификации параметров многокомпонентных стержневых систем.

**1. Задача восстановления поверхностных нагрузок.** Предположим, что в области $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ ($\Omega_1 = (0, \xi)$, $\Omega_2 = (\xi, l)$, $0 < \xi < l < \infty$) определено уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(k\frac{d^2y}{dx^2}\right) = u. \tag{1}$$

Здесь $k|_{\overline{\Omega}_l} = k(x)|_{\overline{\Omega}_l} \in C^1(\overline{\Omega}_l) \bigcap C^2(\Omega_l)$, $0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1 < \infty$, $k_0, k_1 = \mathrm{const}$, $l = 1, 2$.

На концах отрезка $[0, l]$ заданы условия

$$y = y' = 0. \tag{2}$$

В точке $x = \xi$ условия сопряжения имеют вид

$$y^- = y^+ = 0, \tag{3}$$

$$[ky''] = 0, \qquad \{ky''\}^{\pm} = \alpha[y']. \tag{4}$$

Задача (1)–(4) описывает прогибы жестко защемленного на концах составного стержня с шарниром конечной жесткости $\alpha > 0$, подпертым абсолютно жесткой опорой в точке $x = \xi$. Здесь $y = y(x)$ — прогиб стержня в точке с координатой $x$, $[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi^{\pm} = \{\varphi\}^{\pm} = \varphi(\xi \pm 0)$.

Предположим, что в $N$ различных точках $d_i \in \Omega$ известны прогибы составного стержня

$$y(d_i) = f_i, \qquad i = \overline{1, N}. \tag{5}$$

Таким образом получена задача (1)–(5), состоящая в нахождении функции $u \in U = L_2(\Omega)$, при которой решение $y = y(u) = y(u; x)$ краевой задачи (1)–(4) удовлетворяет равенствам (5).

Для каждого $u \in U$ составим функционал-невязку

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i (y_i(u) - f_i)^2, \tag{6}$$

где $\rho_i$ — весовые коэффициенты, $y_i = y_i(u) = y(u; d_i) = A_i u$.

Вместо решения $y(u)$ краевой задачи (1)–(4) будем использовать обобщенное ее решение.

**Определение 1.** При каждом фиксированном $u \in U$ обобщенным решением краевой задачи (1)–(4) называется функция $y = y(u) \in V$, которая $\forall\, w(x) \in V$ удовлетворяет тождеству

$$a(y, w) = l(u; w), \tag{7}$$

где $a(y, w) = \int\limits_0^l ky''w''dx + \alpha[y'][w']$, $l(u; w) = \int\limits_0^l uw\,dx$, $y'' = d^2y/dx^2$, $y' = dy/dx$, $V = \{v(x)\colon v|_{\Omega_i} \in W_2^2(\Omega_i),\ i = 1, 2;\ v(0) = v'(0) = v(l) = v'(l) = 0,\ v^- = v^+ = 0\}$.

Вместо задачи (1)–(5) будем решать задачу (7), (6), состоящую в нахождении функции $u \in U$, при которой выполняется равенство

$$J(u) = \min_{v \in U} J(v), \tag{8}$$

где $y = y(u)$ — решение задачи (7).

Итерационная последовательность для нахождения приближения $u_{n+1}$ решения $u \in U$ задачи (8), (7) имеет вид

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, n^*, \tag{9}$$

и начинается с некоторого начального приближения $u_0 \in U$, где направление спуска $p_n$ и коэффициент $\beta_n$ определяются выражениями [5]:

для метода минимальных ошибок

$$p_n = J'_{u_n}, \qquad \beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}, \tag{10}$$

для метода скорейшего спуска

$$p_n = J'_{u_n}, \qquad \beta_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2}, \tag{11}$$

для метода сопряженных градиентов

$$\begin{aligned} &p_n = J'_{u_n} + \gamma_n p_{n-1}, \qquad \gamma_0 = 0,\\ &\gamma_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|J'_{u_{n-1}}\|^2}, \qquad \beta_n = \frac{(J'_{u_n}, p_n)}{\|Ap_n\|^2}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $e_n = Au_n - f$, $Au = \{A_i u\}_{i=1}^N$, $f = \{f_i\}_{i=1}^N$, $J'_{u_n}$ — производная Гато функционала (6).

Для допустимого приращения $\Delta u$ функции $u \in U$ на основании краевой задачи (1)–(4) или обобщенной задачи (7) приращение $\theta = \Delta y$ решения $y = y(u)$ можем определить как решение задачи: найти функцию $\theta \in V$, которая $\forall\, w(x) \in V$ удовлетворяет тождеству

$$a(\theta, w) = l_\theta(\Delta u; w), \tag{13}$$

где $l_\theta(\Delta u; w) = (\Delta u, w)$.

Для каждого приближения $u_n \in U$ задачи (7), (8) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2}\left(k\frac{d^2\psi}{dx^2}\right) = 0, \qquad x \in \Omega \setminus \gamma_d,\\ &\psi = \psi' = 0, \qquad x = 0, l,\\ &\psi^- = \psi^+ = 0,\\ &[k\psi''] = 0, \qquad \{k\psi''\}^\pm = \alpha[\psi'],\\ &[\psi] = 0, \quad [(k\psi'')'] = \rho_i(y_i(u_n) - f_i), \quad \{k\psi''\}|_{x=d_i \pm 0} = 0, \quad x = d_i, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\gamma_d = \bigcup\limits_{i=1}^N d_i$, $i = \overline{1, N}$.

**Определение 2.** Обобщенным решением краевой задачи (14) называется функция $\psi(x) \in V_d$, которая $\forall\, w(x) \in V_d$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi, w) = l_\psi(w), \tag{15}$$

где

$$V_d = \{v(x) \in \overline{V}_d \colon v(0) = v'(0) = v(l) = v'(l) = 0,\, [\psi]|_{x=\xi} = 0,\, [\psi]|_{d_i} = 0,\, i = \overline{1, N}\},$$

$$\overline{V}_d = \{v(x) \colon v|_{\Omega_i} \in W_2^2(\Omega_i),\ i = \overline{0, N+1}\},$$

$$\Omega_0 = (0, d_1), \qquad \Omega_1 = (d_1, d_2), \qquad \ldots, \qquad \Omega_{N+1} = (d_N, l), \tag{16}$$

$$l_\psi(w) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i (y_i(u_n) - f_i) w(d_i).$$

Выбирая в (15) вместо функции $w$ разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (13), имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i (y_i(u_n) - f_i)(y_i(u_{n+1}) - y_i(u_n)) = a(\psi, y(u_{n+1}) - y(u_n)) =$$

$$= a(y(u_{n+1}) - y(u_n), \psi) = l_\theta(\Delta u_n; \psi) = \int_0^l \Delta u_n \psi\, dx,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i (y_i(u_n) - f_i)(y_i(u_{n+1}) - y_i(u_n)) = \int_0^l \Delta u_n \psi\, dx. \tag{16$'$}$$

Следовательно, для производной Гато функционала-невязки (6) получаем

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n, \tag{17}$$

где $\widetilde{\psi}_n = \psi(x)$, $\|J'_{u_n}\|^2 = \int_0^l \psi^2(x)\, dx$.

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (9), (10) для определения $(n+1)$-го приближения $u_{n+1}$ решения $u \in U$ задачи (6), (7) направление спуска $p_n$ и коэффициент $\beta_n$ можем определить с помощью выражений (10).

Решив задачу нахождения функции $z(\widetilde{\psi}_n) = z(\widetilde{\psi}_n; x) \in V$, которая $\forall w(x) \in V$ удовлетворяет тождеству $a(z, w) = l(\widetilde{\psi}_n; w)$, получим

$$AJ'_{u_n} = \{z_i(\widetilde{\psi}_n)\}_{i=1}^{N}, \tag{18}$$

где $z_i(\widetilde{\psi}_n) = z(\widetilde{\psi}_n; x)|_{x=d_i}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (18), можем реализовать метод скорейшего спуска (9), (11) для определения $(n+1)$-го приближения $u_{n+1}$ решения $u \in U$ задачи (6), (7). Определив направление спуска $p_n$ с помощью формул (12) и решив задачу нахождения функции $z(p_n) = z(p_n; x) \in V$, которая $\forall\, w(x) \in V$ удовлетворяет тождеству

$$a(z, w) = l(p_n; w), \tag{19}$$

получим вектор

$$Ap_n = \{A_i p_n\}_{i=1}^{N}, \tag{20}$$

где $A_i p_n = z(p_n; x)|_{x=d_i}$, $i = \overline{1, N}$.

Учитывая (20), можем использовать метод сопряженных градиентов (9), (12) для определения $(n+1)$-го приближения $u_{n+1}$ решения $u$ задачи (6), (7).

**2. Параметрический способ идентификации поверхностных нагрузок.** В задаче (6), (7) вместо множества $U$ используем его подмножество $H_m$ с базисом $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$. На основании $(16')$ получаем

$$\sum_{i=1}^{N}\rho_i(y_i(u_n)-f_i)(y_i(u_{n+1})-y_i(u_n))=\sum_{j=1}^{m}\Delta a_j\int_0^l\varphi_j(x)\psi(x)\,dx,$$

где $\Delta a_j\in\mathbb{R}^1$, $j=\overline{1,m}$.

Следовательно,

$$J'_{u_n}=\widetilde{\psi}_n,$$

где $\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_{n_j}\}_{j=1}^m$, $\widetilde{\psi}_{n_j}=\int\limits_0^l\varphi_j\psi\,dx$, $\|J'_{u_n}\|^2=\sum\limits_{j=1}^m\widetilde{\psi}_{n_j}^2$.

**3. Идентификация коэффициентов жесткости стержней и шарнира.** Предположим, что в области $\Omega=\Omega_1\bigcup\Omega_2$ определено уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(u_1(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\widetilde{f}(x).\tag{21}$$

На концах отрезка $[0,l]$ заданы краевые условия (2), а в точке $x=\xi$ условия сопряжения имеют вид

$$y^-=y^+=0,\tag{22}$$

$$[u_1y'']=0,\qquad\{u_1y''\}^{\pm}=u_2[y'].\tag{23}$$

Функционал-невязка имеет вид (6).

**Определение 3.** При каждом фиксированном $u\in U=(C_+(\overline{\Omega}_1)\times C_+(\overline{\Omega}_2))\times R_+$ обобщенным решением краевой задачи (21)–(23), (2) называется функция $y=y(u)=y(u;x)\in V$, которая $\forall\,w\in V$ удовлетворяет тождеству

$$a(u;y,w)=l(w),\tag{24}$$

где $a(u;y,w)=\int\limits_0^l u_1y''w''dx+u_2[y'][w']$, $l(w)=\int\limits_0^l\widetilde{f}(x)w(x)\,dx$, $u_1=(u_{11},u_{12})$, $u_{1j}=u_1|_{\Omega_j}$, $j=1,2$, $C_+(\overline{\Omega}_j)=\{v(x)\colon v|_{\overline{\Omega}_j}\in C(\overline{\Omega}_j), v>0\}$.

Для допустимого приращения $\Delta u$ вектора $u\in U$ на основании обобщенной задачи (24) приращение $\theta=\Delta y$ решения $y=y(u)$ можем определить как решение задачи: найти функцию $\theta\in V$, которая $\forall\,w(x)\in V$ удовлетворяет тождествам

$$a(u;\theta,w)=l_\theta(\Delta u;w),\tag{25}$$

где $l_\theta(\Delta u;w)=l_\theta^1(\Delta u;w)$, $l_\theta^1(\Delta u;w)=-\int\limits_0^l\Delta u_1y''w''\,dx-\Delta u_2[y'][w']$.

Для каждого приближения $u_n \in U$ задачи (6), (24) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}\left(u_1\frac{d^2\psi}{dx^2}\right) = 0, \qquad x \in \Omega \setminus \gamma_d,\\
&\psi = \psi' = 0, \qquad x = 0, l,\\
&\psi^- = \psi^+ = 0,\\
&[u_1\psi''] = 0, \qquad \{u_1\psi''\}^{\pm} = u_2[\psi'],\\
&[\psi] = 0, \qquad [(u_1\psi'')'] = \rho_i(y_i(u_n) - f_i), \qquad x = d_i,\\
&\{u_1\psi''\}|_{x=d_i\pm 0} = 0, \qquad i = \overline{1, N}.
\end{aligned} \tag{26}
$$

**Определение 4.** Обобщенным решением краевой задачи (26) называется функция $\psi(x) \in V_d$, которая $\forall\, w(x) \in V_d$ удовлетворяет тождеству

$$
a(u; \psi, w) = l_\psi(w), \tag{27}
$$

где функционал $l_\psi(w)$ определен выражением (16).

Выбирая в (27) вместо функции $w$ разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (25) имеем

$$
\sum_{i=1}^{N} \rho_i(y_i(u_n) - f_i)(y_i(u_{n+1}) - y_i(u_n)) = -\int_0^l \Delta u_1 y''\psi'' dx - \Delta u_2 [y'][\psi'].
$$

Следовательно,

$$
J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n, \tag{28}
$$

где $\widetilde{\psi}_n = (\widetilde{\psi}_{n_1}, \widetilde{\psi}_{n_2})$, $\widetilde{\psi}_{n_1} = -y''\psi''|_{\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2}$, $\widetilde{\psi}_{n_2} = -[y'][\psi']$, $\|J'_{u_n}\|^2 = \int_0^l \widetilde{\psi}_{n_1}^2 dx + \widetilde{\psi}_{n_2}^2$.

*Замечание 1.* Если $u_1|_{\overline{\Omega}_j} = \mathrm{const}$, то $\widetilde{\psi}_{n_1}|_{\overline{\Omega}_j} = -\int_{\Omega_j} y''\psi'' dx$. Следовательно,

$$
\|J'_{u_n}\|^2 = \int_{\Omega_i} \widetilde{\psi}_{n_1}^2 dx + (\widetilde{\psi}_{n_1}\big|_{\Omega_j})^2 + \widetilde{\psi}_{n_2}^2, \qquad i = \{1, 2\} \setminus j.
$$

*Замечание 2.* Если $u_1 = (u_{11}, u_{12}), u_{11}, u_{12} = \mathrm{const} > 0$, то для допустимого приращения $\Delta u$ вектора $u \in U$ на основании краевой задачи (21)–(24), (2) приращение $\theta = \Delta y$ решения $y = y(u)$можем определить как решение задачи

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}\left(u_1\frac{d^2\theta}{dx^2}\right) = -\Delta u_1\frac{d^4 y}{dx^4}, \qquad x \in \Omega_1 \bigcup \Omega_2,\\
&\theta = \theta' = 0, \qquad x = 0, l,\\
&\theta^- = \theta^+ = 0,\\
&[u_1\theta''] = -[\Delta u_1 y''], \qquad \{u_1\theta''\}^{\pm} = \Delta u_2[y'] - \{\Delta u_1 y''\}^{\pm}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

**Определение 5.** Обобщенным решением краевой задачи (29) называется функция $\theta(x) \in V$, которая $\forall\, w \in V$ удовлетворяет тождеству

$$a(u;\theta,w) = l_\theta(\Delta u; w), \tag{30}$$

где

$$l_\theta(\Delta u; w) = l_\theta^2(\Delta u; w),$$

$$l_\theta^2(\Delta u; w) = -\left(\Delta u_1 \frac{d^4 y}{dx^4}, w\right) - \Delta u_2 [y'][w'] + \Delta u_1^+ \{y''\}^+ w'^+ - \Delta u_1^- \{y''\}^- w'^-.$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n,$$

где

$$\widetilde{\psi}_n = (\widetilde{\psi}_{n_1}, \widetilde{\psi}_{n_2}), \qquad \widetilde{\psi}_{n_1} = (\widetilde{\psi}_{n_{11}}, \widetilde{\psi}_{n_{12}}), \qquad \widetilde{\psi}_{n_{11}} = -\left(\frac{d^4 y}{dx^4}, \psi\right)_{L_2(\Omega_1)} - \{y''\}^- \psi'^-,$$

$$\widetilde{\psi}_{n_{12}} = -\left(\frac{d^4 y}{dx^4}, \psi\right)_{L_2(\Omega_2)} + \{y''\}^+ \psi'^+, \qquad \widetilde{\psi}_{n_2} = -[y'][\psi'].$$

Полученные выражения позволяют реализовать градиентные методы (9), (10); (9), (11); (9), (12) для идентификации параметра $u_1$ уравнения прогибов (21) и параметра $u_2$ — условий сопряжения (23).

**4. Идентификация параметров шарнира и опор.** Пусть на области $\Omega = (0,\xi) \bigcup (\xi, l)$ определено уравнение прогибов

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(k \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \widetilde{f}. \tag{31}$$

На концах отрезка $[0,l]$ заданы краевые условия

$$\begin{aligned} &y''(0) = 0, \qquad (ky'')'|_{x=0} + u_1 y(0) = 0,\\ &y(l) = 0, \qquad ky''(l) = Q, \qquad Q \in \mathbb{R}^1, \end{aligned} \tag{32}$$

а в точке $x = \xi$ — условия сопряжения

$$[y] = 0, \qquad [ky''] = 0, \qquad \{ky''\}^\pm = u_2[y'], \qquad [(ky'')'] = -u_3 y(\xi). \tag{33}$$

**Определение 6.** При каждом фиксированном $u \in U = R_+^3$ обобщенным решением краевой задачи (31)–(33) называется функция $y = y(u) \in V = \{v(x)\colon v|_{\Omega_i} \in W_2^2(\Omega_i),\ i = 1,2;\ v(l) = 0,\ [v] = 0\}$, которая $\forall\, w \in V$ удовлетворяет тождеству

$$a(u; y, w) = l(w), \tag{34}$$

где $a(u;y,w) = \int\limits_0^l k y'' w'' dx + u_3 y(\xi) w(\xi) + u_1 y(0) w(0) + u_2 [y'][w']$, $l(w) = \int\limits_0^l \widetilde{f} w dx + Q v'(l)$.

Функционал-невязка имеет вид (6).

Для каждого приближения $u_n \in U$ решения и задачи (34), (6) сопряженную задачу определим равенствами

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(k\frac{d^2\psi}{dx^2}\right) = 0, \qquad x \in \Omega,$$

$$\psi''(0) = 0, \qquad (k\psi'')'|_{x=0} + u_1\psi(0) = 0,$$

$$\psi(l) = 0, \qquad k\psi''(l) = 0, \qquad [\psi] = 0, \qquad [k\psi''] = 0,$$

$$\{k\psi''\}^{\pm} = u_2[\psi'], \qquad [(k\psi'')'] = -u_3\psi(\xi),$$

$$[\psi]|_{d_i} = 0, \qquad [(k\psi'')'] = \rho_i(y_i(u_n) - f_i), \qquad \{k\psi''\}|_{x=d_i\pm 0} = 0, \qquad x = d_i, \qquad i = \overline{1,N}.$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_{n_i}\}_{i=1}^3, \qquad \widetilde{\psi}_{n_1} = -y(0)\psi(0), \qquad \widetilde{\psi}_{n_2} = -[y'][\psi'], \qquad \widetilde{\psi}_{n_3} = -y(\xi)\psi(\xi). \qquad (35)$$

Выражения (35) позволяют легко реализовать градиентные методы (9), (10); (9), (11) и (9), (12) для идентификации параметров $u_1$, $u_2$, $u_3$ рассматриваемой составной стержневой системы.


1. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2003. – 506 с.
2. *Sergienko I. V., Deineka V. S.* Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. – New York: Kluwer, 2005. – 400 p.
3. *Дейнека В. С.* Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2005. – 364 с.
4. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – Москва: Мир, 1972. – 414 с.
5. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1988. – 288 с.



*Институт кибернетики им. В. М. Глушкова*
*НАН Украины, Киев*



*Поступило в редакцию 10.07.2007*