УДК 519.859

Л. Г. Евсеева

Математическая модель и метод решения задачи упаковки интервальных параллелепипедов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Г. Стояном)

A mathematical interval model of the problem of optimization of a packing of interval parallelepipeds is developed. The transition to a two-criterion problem in the Euclid space is realized. A strategy of the solution based on the use of both the optimization with respect to the groups of variables and the modified method of reducing neighborhoods is proposed.

Многие прикладные и практические задачи размещения, упаковки, раскроя и покрытия относятся к классу задач геометрического проектирования [1]. Задачи упаковки параллелепипедов 3DBP (3D Bin Packing) занимают особое место в классе задач Cutting & Packing (3D C&P) [2], что обусловлено их актуальностью и широким спектром приложений.

В основе предлагаемых исследователями [2, 3] методов решения задач трехмерной упаковки — генетический алгоритм (genetic algorithm), алгоритм "имитационного отжига" (simulated annealing algorithm), эвристические алгоритмы, методы динамического программирования. Например, для решения задачи погрузки контейнеров (container loading problem) предлагаются конструктивные эвристики, учитывающие практическое содержание задачи, tabu поиск, методы линейного программирования.

Эффективные методы решения оптимизационных задач размещения разработаны в научной школе Ю. Г. Стояна [1, 4]: модификации методов локальной и глобальной оптимизации. Однако, как правило, математическое моделирование и решение задач размещения осуществлялось без учета погрешностей исходных данных, т. е. в идеализированной форме.

Развитие геометрического проектирования как научного направления предоставило возможность учета погрешности метрических характеристик и параметров размещения геометрических объектов в математических моделях задач и методах их решения на основе использования приложения интервального анализа [5] в геометрическом проектировании, интервальной геометрии [6]. Однако основное внимание уделялось двумерным задачам (см., например, [7]).

Целью настоящей работы является построение математической модели и разработка метода решения задачи упаковки параллелепипедов с учетом погрешностей метрических характеристик и параметров размещения объектов на основе применения таких понятий интервальной геометрии, как интервальный параллелепипед, интервальное касание выпуклых интервальных многогранников, а также понятий элементарного интервального отображения и интервального направленного множества [8].

Рассмотрим оптимизационную задачу геометрического проектирования [1] в следующей постановке. Пусть в евклидовом пространстве R^3 имеется конечный набор параллелепипедов $P_i \in R^3$ с метрическими характеристиками

$$m_i^\nu = (a_1^i \pm \nu_{a_1^i}, a_2^i \pm \nu_{a_2^i}, a_3^i \pm \nu_{a_3^i}), \tag{1}$$

где

$$a_k^i \in R^+, \qquad \nu_{a_k^i} \in R^+, \tag{2}$$
$$\nu_{a_k^i} < \varepsilon a_k^i, \qquad \varepsilon \in (0,1) \subset R^1, \qquad k \in J_3, \qquad i \in \{0\} \bigcup J_n, \qquad J_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Значение ε зависит от конкретной прикладной или научной задачи и характеризует точность задания исходных данных.

Пусть высота a_3^0 параллелепипеда P_0 является достаточно большой для того, чтобы объекты P_i, $i \in J_n$, были гарантированно упакованы в область P_0.

Обозначим через $P_i(u_i^\nu)$ параллелепипед P_i с параметрами размещения

$$u_i^\nu = (x_1^i \pm \nu_{x_1^i}, x_2^i \pm \nu_{x_2^i}, x_3^i \pm \nu_{x_3^i}) \in R^3, \qquad \nu_{x_k^i} \in R^1, \qquad k \in J_3, \qquad i \in \{0\} \bigcup J_n. \tag{3}$$

Задача. Найти вектор $u^\nu = (u_1^\nu, u_2^\nu, \ldots, u_n^\nu) \in R^{3n}$, такой, что параллелепипеды $P_i(u_i^\nu) \subset \subset P_0(u_0^\nu)$, $i \in J_n$, без взаимных пересечений и высота h^* занятой части $P_0(u_0^\nu)$ и ее погрешность ν_h^* достигали минимума.

Представим метрические характеристики (2) и параметры размещения (3) в виде пары $(\alpha, \nu_\alpha) \in R^2$, где $\nu_\alpha \in R^1$ — погрешность задания величины $\alpha \in R^1$.

На основании гомеоморфизма [6] пространств $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ и R^2 зададим биекцию

$$\begin{aligned} &R^2 \ni (a_k^i, \nu_{a_k^i}) \leftrightarrow \langle a_k^i, \nu_{a_k^i} \rangle = \langle A_k^i \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \\ &R^2 \ni (x_k^i, \nu_{x_k^i}) \leftrightarrow \langle x_k^i, \nu_{x_k^i} \rangle = \langle X_k^i \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \qquad k \in J_3, \qquad i \in \{0\} \bigcup J_n. \end{aligned} \tag{4}$$

В качестве математических моделей параллелепипедов $P_i(u_i^\nu)$, $i \in \{0\} \bigcup J_n$, с метрическими характеристиками m_i^ν и параметрами размещения u_i^ν в рамках данного исследования рассматриваются точечные множества трехмерного интервального пространства:

$$\mathbf{P}_i(U_i) \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R} = \mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \mathbf{I}_s\mathbf{R},$$
$$\mathbf{P}_i(U_i) = \operatorname{int} \mathbf{P}_i(U_i) \bigcup \mathbf{fr}\, \mathbf{P}_i(U_i), \qquad i \in \{0\} \bigcup J_n,$$

с интервальными метрическими характеристиками $\mathbf{m}_i = \{2\langle A_1^i \rangle, 2\langle A_2^i \rangle, 2\langle A_3^i \rangle\}$ и параметрами размещения $U_i = (\langle X_1^i \rangle, \langle X_2^i \rangle, \langle X_3^i \rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $\langle X_k^i \rangle = \langle x_k^i, \nu_{x_k^i} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $k \in J_3$, $i \in \{0\} \bigcup J_n$, которые являются интервальными направленными множествами [8]. При этом интервальное уравнение [6] интервальной границы $\mathbf{fr}\, \mathbf{P}_i(U_i)$ [9] можно представить в виде

$$\mathbf{f}(U_i) = \mathbf{0}, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{f}(U_i) = \max\{\mathbf{f}_i^t(U_i), t = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \qquad \forall i \in \{0\} \bigcup J_n, \qquad \mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle,$$
$$\mathbf{f}_i^k(U_i) = (\langle X_k \rangle - \overline{\langle X_k^i \rangle}) - \overline{\langle A_k^i \rangle}, \qquad \mathbf{f}_i^{k+3}(U_i) = -\overline{(\langle X_k \rangle - \overline{\langle X_k^i \rangle})} - \overline{\langle A_k^i \rangle}, \qquad \forall k \in J_3,$$
$$\overline{\langle X \rangle} = \overline{\langle x, \nu_x \rangle} = \langle x, -\nu_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} - \text{элемент, сопряженный элементу } \langle X \rangle = \langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}.$$

Тогда задача может быть представлена как оптимизационная задача упаковки интервальных параллелепипедов $\mathbf{P}_i(U_i) \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $i \in J_n$, в интервальной области $\mathbf{P}_0(U_0) \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$.

Для аналитического описания взаимодействия объектов трехмерного интервального пространства, следуя работе [10], введено понятие интервального $\mathbf{\Phi}$-отображения.

Отображение $\mathbf{\Phi}\colon \mathbf{I}_s^6\mathbf{R} \to \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ называется интервальным $\mathbf{\Phi}$-отображением для объектов $\mathbf{T}_i(U_i) \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $i = 1, 2$, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\mathbf{\Phi}(U_1, U_2) > \mathbf{0}$, если $\mathbf{T}_1(U_1) \bigcap \mathbf{T}_2(U_2) = \varnothing$;

2) $\mathbf{\Phi}(U_1, U_2) = \mathbf{0}$, если $\begin{cases} \operatorname{int} \mathbf{T}_1(U_1) \bigcap \operatorname{int} \mathbf{T}_2(U_2) & = \varnothing, \\ \mathbf{fr}\, \mathbf{T}_1(U_1) \bigcap \mathbf{fr} \mathbf{T}_2(U_2) & \neq \varnothing; \end{cases}$

3) $\mathbf{\Phi}(U_1, U_2) < \mathbf{0}$, если $\operatorname{int} \mathbf{T}_1(U_1) \bigcap \operatorname{int} \mathbf{T}_2(U_2) \neq \varnothing$.

На основании Ф-функции параллелепипедов идеализированного случая [10], а также условия интервального касания точек интервального пространства $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ [11], интервальное $\mathbf{\Phi}$-отображение примет вид:

1) для интервального параллелепипеда $\mathbf{P}_i(U_i)$ и интервального объекта $\mathbf{P}_0^*(U_0) = \mathbf{I}_s^3\mathbf{R} \setminus cl\mathbf{P}_0(U_0) \bigcup \mathbf{fr}\mathbf{P}_0(U_0)$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{\Phi}_{0i}(U_0, U_i) = \max\{\mathbf{f}_{0i}^t(U_0, U_i), t = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\
&\mathbf{f}_{0i}^k(U_0, U_i) = \langle X_k^i \rangle - \langle \overline{X_k^0} \rangle + \langle -\nu_{a_k^0} - \nu_{a_k^i}, \nu_{a_k^0} - \nu_{a_k^i} \rangle, \\
&\mathbf{f}_{0i}^{k+3}(U_0, U_i) = -\overline{\langle X_k^i \rangle - \langle \overline{X_k^0} \rangle} + \langle A_k^0 \rangle - \overline{\langle A_k^i \rangle} - \langle \nu_{a_k^0} + \nu_{a_k^i}, 0 \rangle, \quad \forall k \in J_3, \quad i \in J_n;
\end{aligned} \tag{6}
$$

2) для интервальных параллелепипедов $\mathbf{P}_i(U_i)$ и $\mathbf{P}_j(U_j)$, $i, j \in J_n$, $i < j$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{\Phi}_{ij}(U_i, U_j) = \max\{\mathbf{f}_{ij}^t(U_i, U_j), t = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\
&\mathbf{f}_{ij}^k(U_i, U_j) = \langle X_k^j \rangle - \langle \overline{X_k^i} \rangle - \overline{\langle A_k^i \rangle} - \langle \overline{\nu_{a_k^i} + \nu_{a_k^j}, \nu_{a_k^j}} \rangle, \\
&\mathbf{f}_{ij}^{k+3}(U_i, U_j) = -\overline{\langle X_k^j \rangle - \langle \overline{X_k^i} \rangle} - \overline{\langle A_k^i \rangle} - \langle \overline{\nu_{a_k^i} + \nu_{a_k^j}, \nu_{a_k^j}} \rangle, \qquad \forall k \in J_3,
\end{aligned} \tag{7}
$$

где $\langle X_k^i \rangle - \langle \overline{X_k^0} \rangle$, $\langle X_k^j \rangle - \overline{\langle X_k^i \rangle}$, $\forall k \in J_3$, — интервальные координаты параметров размещения U_{0i}, U_{ij} соответственно.

На основании гомеоморфизма пространств $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ и R^2 [6], в качестве интервального отображения цели принимаем "интервальную высоту" $\langle H \rangle$ занятой части интервального параллелепипеда $\mathbf{P}_0(U_0)$ как результат размещения в нем интервальных параллелепипедов $\mathbf{P}_i(U_i)$, $i \in J_n$, где

$$\langle H \rangle = \max_{j \in J_n} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{\Pi}_0, \mathbf{\Pi}_j).$$

Здесь $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{\Pi}_0, \mathbf{\Pi}_j)$ — интервальное расстояние [12] между интервальной гиперплоскостью $\mathbf{\Pi}_0\colon \mathbf{f}_0^6(U_0) = \mathbf{0}$, участвующей в формировании $\mathbf{fr}\, \mathbf{P}_0(U_0)$, и интервальными гиперплоскостями $\mathbf{\Pi}_j\colon \mathbf{f}_j^5(U_j) = \mathbf{0}$, $j \in J_n$, участвующими в формировании $\mathbf{fr}\, \mathbf{P}_j(U_j)$, и интервально параллельными интервальной координатной плоскости $\langle X \rangle O \langle Y \rangle$. Здесь максимум понимаем в соответствии с отношением линейного порядка в пространстве $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

На основании (6), (7) интервальную математическую модель задачи представим в виде

$$\inf_{(U, \langle H \rangle) \in \mathbf{D} \subset \mathbf{I}_s^{3n+1}\mathbf{R}} \langle H \rangle, \tag{8}$$

где

$$\mathbf{D}\colon \begin{cases} \mathbf{\Phi}_{0i}(U_0, U_i) \geqslant \mathbf{0}, & i \in J_n, \\ \mathbf{\Phi}_{ij}(U_i, U_j) \geqslant \mathbf{0}, & i \in J_n, \quad j \in J_n, \quad i < j, \end{cases} \tag{9}$$

$$U = (U_1, U_2, \ldots, U_n) \in \mathbf{I}_s^{3n}\mathbf{R}, \qquad U_i = (\langle X_1^i \rangle, \langle X_2^i \rangle, \langle X_3^i \rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}, \qquad i \in J_n,$$

а $\mathbf{\Phi}_{0i}(U_0, U_i)$ и $\mathbf{\Phi}_{ij}(U_i, U_j)$ определяются соотношениями (6) и (7).

Осуществим погружение математической модели (8), (9) в евклидово пространство R^{6n+2}, изометричное интервальному пространству $\mathbf{I}_s^{3n+1}\mathbf{R}$.

На основании определения интервального неравенства [6] и соотношений (6), (7), неравенствам из системы (9) в пространстве R^{6n+2} соответствуют наборы линейных уравнений и неравенств вида

$$\begin{aligned}
&\chi_{ij}^k\colon && \left[\begin{array}{l} -(x_k^j - x_k^i) - (a_k^j + \nu_{a_k^j} + \nu_{a_k^i}) > 0, \\ \begin{cases} -(x_k^j - x_k^i) - (a_k^j + \nu_{a_k^j} + \nu_{a_k^i}) = 0, \\ -(\nu_{x_k^j} - \nu_{x_k^i}) - (\nu_{a_k^j} + \nu_{a_k^i}) \geqslant 0, \end{cases} \end{array}\right. \\
&\chi_{ij}^{k+3}\colon && \left[\begin{array}{l} (x_k^j - x_k^i) - (a_k^i + \nu_{a_k^i} + \nu_{a_k^j}) > 0, \\ \begin{cases} (x_k^j - x_k^i) - (a_k^i + \nu_{a_k^i} + \nu_{a_k^j}) = 0, \\ (\nu_{x_k^j} - \nu_{x_k^i}) - (\nu_{a_k^i} + \nu_{a_k^j}) \geqslant 0, \end{cases} \end{array}\right. \\
&\chi_{0i}^k\colon && \left[\begin{array}{l} x_k^i - \nu_{a_k^0} - \nu_{a_k^i} > 0, \\ \begin{cases} x_k^i - \nu_{a_k^0} - \nu_{a_k^i} = 0, \\ \nu_{x_k^i} + \nu_{a_k^0} - \nu_{a_k^i} \geqslant 0, \end{cases} \end{array}\right. \\
&\chi_{0i}^{k+3}\colon && \left[\begin{array}{l} -x_k^i + (a_k^0 - a_k^i) - (\nu_{a_k^0} + \nu_{a_k^i}) > 0, \\ \begin{cases} -x_k^i + (a_k^0 - a_k^i) - (\nu_{a_k^0} + \nu_{a_k^i}) = 0, \\ -\nu_{x_k^i} + (\nu_{a_k^0} - \nu_{a_k^i}) \geqslant 0, \end{cases} \end{array}\right. \qquad \forall k \in J_3, \qquad i, j \in J_n.
\end{aligned} \tag{10}$$

Тогда математическую модель, полученную при погружении интервальной математической модели (8), (9) в евклидово пространство, представим в виде

$$\inf_{(U_n, h, \nu_h) \in D \subset R^{6n+2}} (h, \nu_h), \tag{11}$$

$$D = \bigcap_{t=1}^{6} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} \chi_{0i}^t \right) \bigcap \left(\bigcap_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \chi_{ij}^t \right) \right), \tag{12}$$

$$U_n = (x_1^1, \nu_{x_1^1}, x_2^1, \nu_{x_2^1}, x_3^1, \nu_{x_3^1}, x_1^2, \nu_{x_1^2}, \ldots, x_1^n, \nu_{x_1^n}, x_2^n, \nu_{x_2^n}, x_3^n, \nu_{x_3^n}) \in R^{6n},$$

$(h, \nu_h) = \mathbf{H}(\langle H \rangle)$, H — гомеоморфизм [6], $\mathbf{H}_{3n+1}(\mathbf{D}) = D$, $\mathbf{D} \subset \mathbf{I}_s^{3n+1}\mathbf{R}$, $D \subset R^{6n+2}$.

На основании особенностей области допустимых решений [7, 13] осуществим переход от задачи (11), (12) с векторной функцией цели к последовательности однокритериальных задач вида

$$h_1 = \min_{(U_n, h, \nu_h) \in D \subset R^{6n+2}} h, \tag{13}$$

$$\nu_h^{(1)} = \min_{(U_n,h,\nu_h)\in D\subset R^{6n+2}} \nu_h. \tag{14}$$

$$h_2 = \min_{(U_n,h,\nu_h)\in D^*\subset R^{6n+2}} h, \tag{15}$$

$$D^* = \big\{(U_n,h,\nu_h)\in D \mid \nu_h = \nu_h^{(1)}\big\}.$$

Как известно [14], точка множества D тогда и только тогда является решением двухкритериальной задачи (11), (12), когда она является единственным с точностью до эквивалентности [13] решением следующей задачи:

$$\min_{(U_n,h,\nu_h)\in D'\subset R^{6n+2}} \nu_h, \tag{16}$$

где

$$D' = \{(U_n,h,\nu_h)\in D \mid h \leqslant h'\}, \qquad h' \in [h_1,h_2].$$

Каждое решение задачи (16) единственно с точностью до эквивалентности.

Общая стратегия решения задачи (16) может быть представлена следующим образом.

1. Решаем задачу (13):

1) генерируем последовательности размещаемых объектов модифицированным методом сужающихся окрестностей [4, 14];

2) строим начальные точки методом оптимизации по группам переменных [1, 15] согласно сгенерированным последовательностям;

3) осуществляем поиск точек локального минимума методом возможных направлений [14].

2. Решаем задачу (14) аналогично (13).

3. Находим множество Парето [13] методом прямоугольников.

4. Находим решение задачи (16) методом последовательной оптимизации.

Разработано программное обеспечение “Packing interval parallelepipeds” INTPAR, реализующее данную стратегию упаковки интервальных параллелепипедов.

Проведены численные эксперименты, по результатам которых можно сделать следующие выводы.

Для произвольных a_k^i и $\nu_{a_k^i} = 0{,}01a_k^i$ справедливо неравенство

$$h^- < h + \nu_h < h^+,$$

$$[h^* - \nu_{h^*}, h^* + \nu_{h^*}] \subset [h^-, h^+],$$

где h^-, h^+ — результаты приближенного решения задачи [13] в случае, когда параллелепипеды P_i^- упаковываются в P_0^+, а P_i^+, $i\in J_n$, — в P_0^- соответственно, где

$$P_i^-(u_i) = \{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_i = a_k^i + \nu_{a_k^i}, k\in J_3\},$$

$$P_i^+(u_i) = \{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_i = a_k^i + \nu_{a_k^i}, k\in J_3\}, \qquad i\in\{0\}\bigcup J_n.$$

Примененный в данной работе подход позволяет вычислить границы выходных данных задачи и сузить полученный интервал при заданных границах входных параметров, таким образом строго определяя интервал, в котором с неизбежностью будет лежать решение, если значения входных параметров принадлежат заданным интервалам.

Программное обеспечение INTPAR может быть использовано при проектировании карт трехмерного раскроя промышленных материалов, при создании малоотходных технологий, в задачах минимизации транспортных расходов и других задач, которые моделируются как 3DBP задачи с учетом погрешностей метрических характеристик и параметров размещения.

1. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наук. думка, 1986. – 267 с.
2. *Terno J., Lindemann R., Scheithauer G.* Cutting Problems and Their Practical Solution. – Thun and Frankfurt/Main: Verlag Harri Deutsch, 1987.
3. *3rd* ESICUP Meeting Euro Special Interest Group on Cutting and Packing. – Instituto Superior de Engerharla do Porto. ISEP Portugal. – 2006. – March. – 16/18.
4. *Стоян Ю. Г., Соколовский В. З.* Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. – Киев: Наук. думка, 1980. – 208 с.
5. *Kaucher E.* Interval analysis in the extended interval space IR // Comp. Suppl. – 1980. – P. 33–49.
6. *Стоян Ю. Г.* Введення в інтервальну геометрію: Навч. пос. – Харків: ХНУРЕ, 2006. – 98 с.
7. *Стоян Ю. Г., Романова Т. Е., Сысоева Ю. А.* Оптимизационная задача размещения правильных интервальных многоугольников // Доп. НАН України. – 1998. – № 9. – С. 114–120.
8. *Евсеева Л. Г., Романова Т. Е, Шеховцов С. Б.* Интервальные направленные множества в многомерных интервальных пространствах // Искусств. интеллект. – 2005. – № 4. – С. 169–176.
9. *Стоян Ю. Г.* Выпуклые интервальные многоугольники // Доп. НАН України. – 2000. – № 5. – С. 33–39.
10. *Stoyan Yu. G.* Ф-function and its basic properties // Там само. – 2001. – No 8. – С. 112–117.
11. *Романова Т. Е., Рудой Д. С.* Интервальное касание точек интервального пространства $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ // Радиоэлектроника и информатика. – 2000. – № 2. – С. 53–57.
12. *Евсеева Л. Г.* Интервальная метрика на n-мерном множестве центрированных интервалов // АСУ и приборы автоматики. – 2006. – Вып. 136. – С. 50–56.
13. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – Москва: Наука, 1982. – 256 с.
14. *Чугай А. М.* Решение задачи упаковки кругов в выпуклый многоугольник с помощью модифицированного метода сужающихся окрестностей // Радиоэлектроника и информатика. – 2005. – № 1. – С. 58–63.
15. *Стоян Ю. Г., Пономаренко Л. Д., Панкратов А. В., Лойко А. Ф.* Программная система КТС автоматической компоновки бокса сложной технической системы блочной конструкции. – Харьков, 1987. – 37 с. – (Препринт / НАН Украины. ИПМаш; 264).

Полтавский университет потребительской кооперации Украины

Поступило в редакцию 20.08.2007