УДК 539.3

Академик НАН Украины **В. П. Шевченко, Е. В. Алтухов, Р. Н. Нескородев**

Однородные решения задачи о равновесии анизотропных пластин с одной плоскостью упругой симметрии

We have constructed homogeneous solutions of the equations of elastic equilibrium for a plate, on the flat edges of which the normal component of a vector of displacements and tangential stresses are equal to zero. An explicit analytic solution of the problem on the stressed state of a layer with elliptic hole in case of the action of a load that is constant over thickness is obtained.

Для исследования напряженно-деформированного состояния упругих тел эффективным является метод однородных решений [1–4]. В работе [1] получены однородные решения трехмерных задач статики трансверсально-изотропных пластин с учетом многообразия однородных краевых условий на плоских гранях. Здесь излагается методика построения и применения однородных решений для анизотропных пластин с одной плоскостью упругой симметрии.

1. Постановка задачи и построение однородных решений. Рассмотрим анизотропную пластину толщиной $2h$, отнесенную к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. На плоских гранях пластины имеют место граничные условия

$$u_3(x_1, x_2, \pm h) = 0, \qquad \sigma_{j3}(x_1, x_2, \pm h) = 0 \qquad (j = 1, 2). \tag{1}$$

Уравнения равновесия и обобщенного закона Гука в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned}
&(L_{11} + A_{55}\partial_3^2)u_1 + (L_{12} + A_{45}\partial_3^2)u_2 + L_{13}\partial_3 u_3 = 0,\\
&(L_{12} + A_{45}\partial_3^2)u_1 + (L_{22} + A_{44}\partial_3^2)u_2 + L_{23}\partial_3 u_3 = 0,\\
&L_{13}\partial_3 u_1 + L_{23}\partial_3 u_2 + (L_{33} + A_{33}\partial_3^2)u_3 = 0;
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_i = (A_{i1}\partial_1 + A_{i6}\partial_2)u_1 + (A_{i6}\partial_1 + A_{i2}\partial_2)u_2 + A_{i3}\partial_3 u_3 \qquad (i = 1, 2, 3, 6),\\
&\sigma_i = A_{i5}\partial_3 u_1 + A_{i4}\partial_3 u_2 + (A_{i5}\partial_1 + A_{i4}\partial_2)u_3 \qquad (i = 4, 5).
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$L_{11} = A_{11}\partial_1^2 + 2A_{16}\partial_1\partial_2 + A_{66}\partial_2^2, \qquad L_{12} = A_{16}\partial_1^2 + (A_{12} + A_{66})\partial_1\partial_2 + A_{26}\partial_2^2,$$

$$L_{13} = (A_{13} + A_{55})\partial_1 + (A_{36} + A_{45})\partial_2, \qquad L_{23} = (A_{36} + A_{45})\partial_1 + (A_{23} + A_{44})\partial_2,$$

$$L_{22} = A_{66}\partial_1^2 + 2A_{26}\partial_1\partial_2 + A_{22}\partial_2^2, \qquad L_{33} = A_{55}\partial_1^2 + 2A_{45}\partial_1\partial_2 + A_{44}\partial_2^2, \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \qquad \sigma_2 = \sigma_{22}, \qquad \sigma_3 = \sigma_{33}, \qquad \sigma_4 = \sigma_{23}, \qquad \sigma_5 = \sigma_{13}, \qquad \sigma_6 = \sigma_{12},$$

A_{ij} — модули упругости.

Следуя А. И. Лурье [5], решения системы (2), удовлетворяющие граничным условиям (1), будем называть однородными. Для построения однородных решений в случае симметричного деформирования относительно срединной плоскости ($x_3 = 0$) пластины (задача А) представим компоненты вектора перемещений в виде

$$
\begin{aligned}
u_i &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2)\cos(\delta_k x_3) \qquad (i = 1, 2),\\
u_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2)\sin(\delta_k x_3), \qquad \delta_k = k\pi h^{-1}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Для кососимметричного деформирования пластины (задача Б) имеем

$$
\begin{aligned}
u_i &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2)\sin(\gamma_k x_3) \qquad (i = 1, 2),\\
u_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2)\cos(\gamma_k x_3), \qquad \gamma_k = \frac{(2k-1)\pi}{2h}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

При этом граничные условия (1) будут удовлетворены, а из системы уравнений (2) с учетом (4), (5) получим уравнения для определения неизвестных функций u_{jk} ($j = \overline{1,3}$). Например, в задаче А:

при $k = 0$ имеют место уравнения

$$
L_{11}u_{10} + L_{12}u_{20} = 0, \qquad L_{12}u_{10} + L_{22}u_{20} = 0;
\tag{6}
$$

если $k \geqslant 1$, то из соотношений (2) и (4) получим

$$
\sum_{n=1}^{3} D_{in}^{(k)} u_{nk} = 0 \qquad (i = \overline{1,3}),
\tag{7}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&D_{11}^{(k)} = A_{55} - \lambda_k^2 L_{11}, \qquad D_{12}^{(k)} = A_{45} - \lambda_k^2 L_{12}, \qquad D_{13}^{(k)} = -\lambda_k L_{13},\\
&D_{21}^{(k)} = A_{45} - \lambda_k^2 L_{12}, \qquad D_{22}^{(k)} = A_{44} - \lambda_k^2 L_{22}, \qquad D_{23}^{(k)} = -\lambda_k L_{23},\\
&D_{31}^{(k)} = \lambda_k L_{13}, \qquad D_{32}^{(k)} = \lambda_k L_{23}, \qquad D_{33}^{(k)} = A_{33} - \lambda_k^2 L_{33}, \qquad \lambda_k = \frac{1}{\delta_k}.
\end{aligned}
$$

Общее решение уравнений (6) представим в виде суммы

$$
u_{i0} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2} d_{ij}\varphi_j(z_j).
\tag{8}
$$

Здесь $\varphi_j(z_j)$ — произвольные аналитические функции обобщенной комплексной переменной $z_j = x_1 + \mu_j x_2$; μ_j — корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} &A_{11}A_{66} - A_{16}^2 + 2(A_{11}A_{26} - A_{12}A_{16})\mu + [A_{11}A_{22} + A_{66}^2 - (A_{12} + A_{66})^2 + 2A_{16}A_{26}]\mu^2 + \\ &\qquad + 2(A_{22}A_{16} - A_{12}A_{26})\mu^3 + (A_{22}A_{66} - A_{26}^2)\mu^4 = 0; \\ &d_{1j} = [A_{16} + (A_{12} + A_{66})\mu_j + A_{26}\mu_j^2]\Delta_j, \qquad d_{2j} = -[A_{11} + 2A_{16}\mu_j + A_{66}\mu_j^2]\Delta_j, \\ &\Delta_j \text{ — произвольные постоянные.} \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда выражения (3) для напряжений примут вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{10} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\mu_j^2\varphi_j'(z_j), \qquad \sigma_{20} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\varphi_j'(z_j), \\ &\sigma_{60} = -2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\mu_j\varphi_j'(z_j), \qquad \sigma_{30} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\omega_j\Delta_j\varphi_j'(z_j), \qquad \sigma_{40} = \sigma_{50} = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} &\Delta_j = \frac{\mu_j}{A_{11}A_{66} - A_{16}^2 + (A_{11}A_{26} - A_{12}A_{16})\mu_j + (A_{16}A_{26} - A_{66}A_{12})\mu_j^2}, \\ &\omega_j = A_{31}A_{16} - A_{11}A_{36} + [A_{31}(A_{12} + A_{66}) - A_{16}A_{36} - A_{11}A_{32}]\mu_j + \\ &\qquad + (A_{31}A_{26} + A_{36}A_{12} - 2A_{32}A_{16})\mu_j^2 + (A_{36}A_{26} - A_{32}A_{66})\mu_j^3, \qquad \varphi_j'(z_j) = \frac{d\varphi_j'}{dz_j}. \end{aligned}$$

Соотношения (8) и (10) могут быть использованы при решении задач о напряженном состоянии пластины с полостями, на которых внешние усилия не изменяются вдоль образующей. С этой целью рассмотрим напряженно-деформированное состояние бесконечной пластины, ослабленной n полостями, боковые поверхности L_r $(r = \overline{1,n})$ которых представляют собой цилиндры с образующими, нормальными плоским граням. Указанная пластина деформируется постоянными по переменной x_3 внешними усилиями, приложенными по боковым поверхностям полостей. Кроме того, внешние усилия $\sigma_1^\infty = p$, $\sigma_2^\infty = q$, $\sigma_6^\infty = t$ могут быть заданы на бесконечности. Граничные условия для определения комплексных потенциалов $\varphi_j(z_j)$ на поверхности r-й полости в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{10}n_{1r} + \sigma_{60}n_{2r} = n_{1r}(P_r - p) - n_{2r}(T_r + t), \\ &\sigma_{60}n_{1r} + \sigma_{20}n_{2r} = n_{1r}(T_r - t) + n_{2r}(P_r - q), \end{aligned} \tag{11}$$

где $P_r(s)$ — нормальная, а $T_r(s)$ — касательная составляющие внешних усилий, приложенных к боковой поверхности; $n_{1r} = \cos(n_r, x_1) = dx_2/ds$, $n_{2r} = \cos(n_r, x_2) = -dx_1/ds$, $ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$; n_r — нормаль к контуру L_r.

Из граничных условий (11) и выражений (10) следует

$$
\begin{aligned}
&2\,\mathrm{Re}[\mu_1\varphi_1(z_1)+\mu_2\varphi_2(z_2)]=\int\limits_0^s[P_r(s)dx_2+T_r(s)dx_1]-px_2+tx_1+c_1,\\
&2\,\mathrm{Re}[\varphi_1(z_1)+\varphi_2(z_2)]=\int\limits_0^s[P_r(s)dx_1-T_r(s)dx_2]+tx_2-qx_1+c_2.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Таким образом, решение задачи приведено к нахождению комплексных потенциалов $\varphi_j(z_j)$ из граничных условий (12).

Для решения системы уравнений (7) воспользуемся методом малого параметра. В качестве такового выбрана величина $\lambda_k = h/(k\pi)$. Представим функции u_{nk} рядами по параметру λ_k в виде суммы трех различных групп предполагаемых решений

$$
u_{1k}=\frac{1}{\lambda_k}\varphi_{1k}+\sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty}\lambda_k^p u_{1kp},\quad u_{2k}=\frac{\alpha}{\lambda_k}\varphi_{1k}+\sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty}\lambda_k^p u_{2kp},\quad u_{3k}=\sum_{p=0,2,\ldots}^{\infty}\lambda_k^p u_{3kp},
\tag{13}
$$

$$
u_{1k}=\frac{\beta}{\lambda_k}\varphi_{2k}+\sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty}\lambda_k^p v_{1kp},\quad u_{2k}=\frac{1}{\lambda_k}\varphi_{2k}+\sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty}\lambda_k^p v_{2kp},\quad u_{3k}=\sum_{p=0,2,\ldots}^{\infty}\lambda_k^p v_{3kp},
\tag{14}
$$

$$
u_{1k}=\sum_{p=0,2,\ldots}^{\infty}\lambda_k^p w_{1kp},\quad u_{2k}=\sum_{p=0,2,\ldots}^{\infty}\lambda_k^p w_{2kp},\quad u_{3k}=\frac{1}{\lambda_k}\varphi_{3k}+\sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty}\lambda_k^p w_{3kp}.
\tag{15}
$$

Последовательно подставляя выражения (13), (14), (15) в уравнения (7) для каждой группы решений, получим

$$
(1-\lambda_k^2\alpha_1P_1)\varphi_{1k}=0;
\tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{3k0}=-\frac{1}{A_{33}}(L_{13}+\alpha L_{23})\varphi_{1k},\\
&u_{1k1}=\left[\frac{A_{44}}{\Delta}(K_{11}+\alpha K_{12})-\frac{A_{45}}{\Delta}(K_{21}+\alpha K_{22})-\alpha_1P_1\right]\varphi_{1k},\\
&u_{2k1}=\left[\frac{A_{55}}{\Delta}(K_{21}+\alpha K_{22})-\frac{A_{45}}{\Delta}(K_{11}+\alpha K_{12})-\alpha\alpha_1P_1\right]\varphi_{1k};\\
&u_{3k,p-1}=\frac{L_{33}u_{3k,p-3}-L_{13}u_{1k,p-2}-L_{23}u_{2k,p-2}}{A_{33}},\\
&u_{1kp}=\frac{(A_{44}L_{11}-A_{54}L_{12})u_{1k,p-2}+(A_{44}L_{12}-A_{45}L_{22})u_{2k,p-2}+(A_{44}L_{13}-A_{54}L_{23})u_{3k,p-1}}{\Delta},\\
&u_{2kp}=\frac{(A_{55}L_{12}-A_{45}L_{11})u_{1k,p-2}+(A_{55}L_{22}-A_{45}L_{12})u_{2k,p-2}+(A_{55}L_{23}-A_{45}L_{13})u_{3k,p-1}}{\Delta}\\
&(p=3,5,\ldots);
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
(1-\lambda_k^2\alpha_2P_2)\varphi_{2k}=0;
\tag{18}
$$

$$v_{3k0} = -\frac{1}{A_{33}}(\beta L_{13} + L_{23})\varphi_{2k},$$

$$v_{1k1} = \left[\frac{A_{44}}{\Delta}(\beta K_{11} + K_{12}) - \frac{A_{45}}{\Delta}(\beta K_{21} + K_{22}) - \beta\alpha_2 P_2\right]\varphi_{2k}, \tag{19}$$

$$v_{2k1} = \left[\frac{A_{55}}{\Delta}(\beta K_{21} + K_{22}) - \frac{A_{45}}{\Delta}(\beta K_{11} + K_{12}) - \alpha_2 P_2\right]\varphi_{2k};$$

соотношения для v_{nkp} ($p \geqslant 3$) получаются из формул (17) заменой u_{nkp} на v_{nkp};

$$(1 - \lambda_k^2 \alpha_3 P_3)\varphi_{3k} = 0; \tag{20}$$

$$w_{1k0} = \frac{1}{\Delta}(A_{44}L_{13} + A_{45}L_{23})\varphi_{3k}, \qquad w_{2k0} = \frac{1}{\Delta}(A_{55}L_{23} + A_{45}L_{13})\varphi_{3k},$$

$$w_{3k1} = \frac{1}{A_{33}}\left[L_{33} - \frac{A_{44}}{\Delta}L_{13}L_{13} + \frac{2A_{45}}{\Delta}L_{13}L_{23} - \frac{A_{55}}{\Delta}L_{23}L_{23} - A_{33}\alpha_3 P_3\right]\varphi_{3k},$$

$$w_{1kp} = \frac{(A_{44}L_{11} - A_{45}L_{12})w_{1k,p-2} + (A_{44}L_{12} - A_{45}L_{22})w_{2k,p-2} + (A_{44}L_{13} - A_{45}L_{23})w_{3k,p-1}}{\Delta}, \tag{21}$$

$$w_{2kp} = \frac{(A_{55}L_{12} - A_{45}L_{11})w_{1k,p-2} + (A_{55}L_{22} - A_{45}L_{12})w_{2k,p-2} + (A_{55}L_{23} - A_{45}L_{13})w_{3k,p-1}}{\Delta},$$

$$w_{3k,p+1} = \frac{L_{33}w_{3k,p-1} - L_{13}w_{1k,p} - L_{23}w_{2k,p}}{A_{33}} \qquad (p = 2, 4, \ldots).$$

В соотношениях (16)–(21) принято

$$K_{11} = L_{11} - \frac{L_{13}L_{13}}{A_{33}}, \qquad K_{12} = K_{21} = L_{12} - \frac{L_{13}L_{23}}{A_{33}}, \qquad K_{22} = L_{22} - \frac{L_{23}L_{23}}{A_{33}},$$

$$\Delta = A_{44}A_{55} - A_{45}A_{45}, \qquad P_i = (\partial_2 - \mu_i\partial_1)(\partial_2 - \overline{\mu_i}\partial_1);$$

μ_i и $\overline{\mu_i}$ ($i = 1, 2$) — корни характеристического уравнения (9) (они различаются тем, что $\mu_1\overline{\mu_1} > \mu_2\overline{\mu_2}$), а μ_3 и $\overline{\mu_3}$ удовлетворяют уравнению $A_{55} + 2A_{45}\mu + A_{44}\mu^2 = 0$; параметры α и α_1, β и α_2, а также α_3 определяются из условия минимизации коэффициентов при операторах дифференцирования в правой части соотношений для функций u_{ik1}, v_{ik1} ($i = 1, 2$) и w_{3k1} соответственно.

Из соотношений (16)–(21) видно, что функции φ_{nk} находятся из решения уравнений (16), (18) и (20), а все остальные функции представлений (13)–(15) выражаются через φ_{nk} посредством формул (17), (19) и (21).

Таким образом, задача свелась к интегрированию обобщенных метагармонических уравнений (16), (18) и (20). Эти уравнения имеют одинаковую структуру, которая представляется в форме

$$[1 - \lambda^2\alpha(\partial_2 - \mu\partial_1)(\partial_2 - \overline{\mu}\partial_1)]F = 0. \tag{22}$$

Общее решение уравнения (22) представляется в виде суперпозиции функций Бесселя мнимого аргумента

$$F(z, \overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!} + \frac{\overline{z}^n}{n!}\right)[C_{1n}I_n(2q\sqrt{\rho}) + C_{2n}K_n(2q\sqrt{\rho})],$$

где $z = x_1 + \mu x_2$, $\rho = z\overline{z}$, $q^2 = 1/[\lambda^2\alpha(\mu - \overline{\mu})^2]$.

В задаче Б из уравнений равновесия (2) и соотношений (5) получим систему для определения функций u_{nk} в форме (7), в которой параметр δ_k следует заменить на параметр $-\gamma_k$.

2. Численные исследования. Рассмотрена бесконечная пластина произвольной толщины $2h$, ослабленная эллиптической полостью, контур L которой задан уравнениями в параметрической форме

$$x_1 = a\cos(\theta), \qquad x_2 = b\sin(\theta),$$

где a и b — полуоси эллипса; $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Пластина деформируется постоянными по переменной x_3 внешними усилиями, которые описаны в п. 1. Для определения напряженно-деформированного состояния пластины вблизи полости необходимо из граничных условий (12) определить функции $\varphi_j(z_j)$, через которые перемещения и напряжения находятся по формулам (8) и (10). Функции $\varphi_j(z_j)$ определены в областях S_j, которые получаются из основной области S аффинными преобразованиями [6]

$$x_{1j} = x_1 + \alpha_j x_2, \qquad x_{2j} = \beta_j x_2, \qquad \mu_j = \alpha_j + i\beta_j.$$

При этом эллиптическому контуру L в областях S_j соответствуют эллиптические контуры L_j, уравнения которых запишутся так:

$$\begin{gathered} t_j = x_1 + \mu_j x_2 = R_j\sigma + \frac{m_j}{\sigma}, \\ R_j = \frac{a - i\mu_j b}{2}, \qquad m_j = \frac{a + i\mu_j b}{2}, \qquad \sigma = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta). \end{gathered} \tag{23}$$

Функция, отображающая внешность единичного круга на внешность эллиптического контура в области S_j, на основании уравнения (23) примет вид

$$z_j = R_j\zeta_j + \frac{m_j}{\zeta_j}, \qquad \zeta_j = r_j\sigma, \qquad r_j \geqslant 1. \tag{24}$$

Представим функции $\varphi_j(z_j)$ в виде ряда:

$$\varphi_j(z_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{kj}}{\zeta_j^k}, \tag{25}$$

где переменная ζ_j связана с z_j зависимостями (24).

Учитывая, что на контуре $r_j = 1$, а переменная $\zeta_j = \sigma$, методом рядов из условий (12) найдем систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения функции (25). Из этой системы найдем

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2(\mu_1 - \mu_2)}[P(ib - \mu_2 a) + T(a + i\mu_2 b) - pbi + q\mu_2 a + t(a - i\mu_2 b)], \\ a_{12} &= -\frac{1}{2(\mu_1 - \mu_2)}[P(ib - \mu_1 a) + T(a + i\mu_1 b) - pbi + q\mu_1 a + t(a - i\mu_1 b)], \\ a_{kj} &= 0 \qquad \text{для} \qquad k > 1. \end{aligned}$$

Здесь принято, что проекции внешних усилий P и T от координат x_1 и x_2 не зависят.

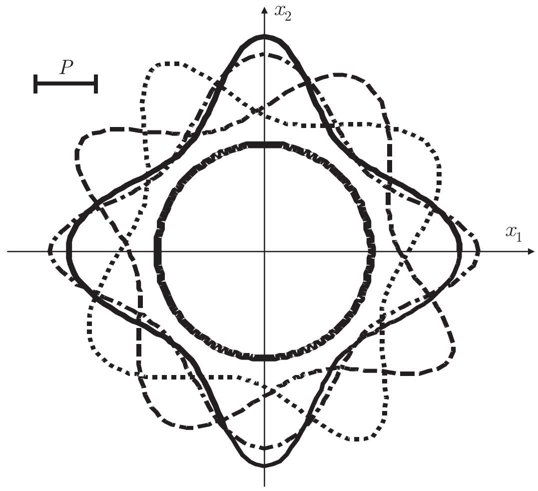

Рис. 1

Полученное решение для приведенных внешних усилий точно удовлетворяет уравнениям теории упругости и всем граничным условиям.

Для численных расчетов был выбран трансверсально-изотропный материал, упругие постоянные которого в случае совпадения плоскости изотропии с плоскостью Ox_1x_2 такие:

$$\frac{E_1}{E} = 1{,}074, \qquad \frac{E_2}{E} = 0{,}523, \qquad \frac{G_2}{E} = 0{,}120, \qquad \nu_1 = 0{,}413, \qquad \nu_2 = 0{,}198,$$

где $E = 10^4$ МПа, а корни характеристического уравнения (9) равны $\mu_1 = 3{,}0260i$ и $\mu_2 = 0{,}4986i$. При повороте плоскости изотропии вокруг оси Ox_2 на некоторый угол φ будем получать анизотропный материал с одной плоскостью упругой симметрии. Например, при $\varphi = 30^\circ$ $\mu_1 = -1{,}1621 + 0{,}9957i$, $\mu_2 = 0{,}4006 + 0{,}6139i$, при $\varphi = 60^\circ$ $\mu_1 = 0{,}7454 + 1{,}1424i$, $\mu_2 = -0{,}4962 + 0{,}4252i$. Для $\varphi = 90^\circ$ получаем трансверсально-изотропный материал, у которого плоскость изотропии совпадает с плоскостью Ox_2x_3 и $\mu_1 = 2{,}0055i$, $\mu_2 = 0{,}3305i$.

Расчеты были проведены для бесконечной плиты с круговой полостью ($a = b = 1$), на боковой поверхности которой задано нормальное давление интенсивности P. На рис. 1 представлены графики распределения тангенциальных напряжений σ_t/P для приведенных выше случаев анизотропии. Сплошная линия соответствует случаю $\varphi = 0^\circ$, пунктирная — случаю $\varphi = 30^\circ$, штрихпунктирная — $\varphi = 60^\circ$, а штриховая — $\varphi = 90^\circ$. Во всех рассмотренных случаях наибольшее по абсолютному значению напряжение σ_t/P равно значению 2,0158.

1. *Алтухов Е. В.* Статические трехмерные задачи для трансверсально-изотропных пластин // Механика композитов: В 12 т. Т. 7. Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. – Киев: ПТОО “А. С. К.”, 1998. – С. 114–137.
2. *Космодамианский А. С.* Пространственные задачи теории упругости для многосвязных пластин: Обзор // Прикл. механика. – 1983. – **19**, № 12. – С. 3–21.
3. *Космодамианский А. С.* Концентрация внутренней энергии в многосвязных телах // Там же. – 2002. – **38**, № 4. – С. 21–48.
4. *Немиш Ю. Н.* Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел (Обзор) // Там же. – 2000. – **36**, № 2. – С. 3–38.
5. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. – Москва: Гостехиздат, 1955. – 492 с.
6. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.

Донецкий национальный университет

Поступило в редакцию 16.07.2007