УДК 517.36

А. С. Хорошун

Параметрическая квадратическая стабилизация нелинейных систем с неопределенностью

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Мартынюком)

The notion of parametric quadratic stabilizability (PQ-stabilizability) of nonlinear controlled systems $\dot{x} = [A+\Delta A(p)]x+B\Phi(u)$ is introduced. The results account for a "shifted equilibrium" in the context of the parametric stability, which is caused by the interplay between reference inputs and the parameter uncertainty in a system.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с управлением

$$\dot{x} = [A + \Delta A(p)]x + B\Phi(u), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, а $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление в момент времени t, p — вектор-параметр. Постоянные матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ представляют известную часть системы, $\Delta A(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ обозначает неопределенные члены и является непрерывной матричнозначной функцией p, $\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — нелинейная непрерывная функция. Предполагаем, что при любом заданном начальном состоянии $x_0 = x(t_0)$, фиксированном значении параметра $p \in \mathbb{R}^l$ и непрерывном управлении u система уравнений (1) имеет единственное решение $x(t; x_0, p, u)$. Управление u считаем линейным относительно состояния $x = 0$, т. е. $u = Kx+r$, где $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — постоянная матрица и $r \in \mathbb{R}^m$ — корректирующая функция.

Относительно системы (1) сделаем следующие предположения.

Предположение 1. *Система уравнений* (1) *такова, что:*

1) функция $\Phi(u) = (\Phi_1(u), \ldots, \Phi_m(u))$ *определена и непрерывна на некотором открытом множестве* $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$ *вместе с частными производными*

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, m, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial u_l \partial u_k}, \qquad i, l, k = 1, \ldots, m;$$

2) точка $u = 0$ *принадлежит множеству* Γ, *причем*

$$\Phi(0) = 0 \qquad \text{и} \qquad \left.\frac{\partial \Phi(u)}{\partial u}\right|_{u=0} \neq 0;$$

3) матрица

$$C = A + B\left.\frac{\partial \Phi(u)}{\partial u}\right|_{u=0} K$$

устойчива;

4) для всех p из области $P \subseteq \mathbb{R}^l$ имеет место оценка

$$\|\Delta A(p)\| \leqslant \eta < \frac{1}{2\|C^{-1}\|}; \tag{2}$$

5) существует значение параметра p^*, принадлежащее области P, такое, что $\Delta A(p^*) = 0$.

При введенных выше предположениях система (1), для значений параметров p^*, $r^* = 0$, имеет состояние равновесия $x^* = 0$, которое устойчиво.

Согласно работе [4] введем определение PQ-стабилизируемости.

Определение 1. Система (1) называется PQ-стабилизируемой управлением $u = Kx + r$, если существуют матрица $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметрическая положительно определенная матрица $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и число $\alpha > 0$ такие, что для всех $(p, r) \in P \times R \subseteq \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$ выполняются следующие условия:

1) существует единственное состояние равновесия $x^e(p, r)$ системы

$$\dot{x} = [A + \Delta A(p)]x + B\Phi(Kx + r); \tag{3}$$

2) производная квадратической функции Ляпунова

$$V(x, x^e(p, r)) = (x - x^e(p, r))^T P(x - x^e(p, r))$$

вдоль решений системы (3) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(x, x^e(p, r))|_{(3)} \leqslant -\alpha\|x - x^e(p, r)\|^2$$

для всех $(x, p, r) \in \Gamma \times P \times R$.

Как видно из данного определения, концепция PQ-стабилизируемости имеет два существенных аспекта: "существование" и "стабилизируемость" системы (1). Нашей задачей является определение области $\Omega_p \times \Omega_r \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$, для которой имеет место "существование", т. е. выполняется условие 1 определения 1, и получение условий, при выполнении которых имеет место "стабилизируемость", т. е. выполняется условие 2 определения 1.

2. Вспомогательные результаты. Пусть $r = (r_1, \ldots, r_s)$, где r_i, $i = 1, \ldots, s$, — некоторые субвекторы вектора r, с размерностями n_i соответственно. Область

$$\Pi = \left\{(x, p, r) \mid \Omega_x \colon \|x\| \leqslant a, \Omega_p = P,\ \Omega_r = \prod_{i=1}^{s} \Omega_{r_i},\ \Omega_{r_i} \colon \|r_i\| \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, s\right\}$$

такую, что для всех (p, r) из $\Omega_p \times \Omega_r$ существует $x^e(p, r)$ — единственное состояние равновесия системы (3), которое принадлежит Ω_x, можно определить с помощью подхода, указанного в работе [2].

Для этого уравнение

$$[A + \Delta A(p)]x + B\Phi(Kx + r) = 0, \tag{4}$$

из которого определяется искомое состояние равновесия, перепишем в виде

$$x = C^{-1}(Cx - [A + \Delta A(p)]x - B\Phi(Kx + r))$$

и рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1} = C^{-1}(Cx_n - [A + \Delta A(p)]x_n - B\Phi(Kx_n + r)). \tag{5}$$

Применяя к (5) теорему о сходимости общего итерационного процесса в псевдометрическом пространстве (см. [1]), получаем, что итерационный процесс (5) сходится, как только уравнение (4) имеет единственное решение. Достаточным для этого является выполнение условия

$$\|B\| \sum_{i=1}^{s} c_i \max_{\Omega_u} \left\| \left(\left| \frac{\partial^2 \Phi_k(u)}{\partial u_l \partial U_i} \right| \right)_{k,l=1}^{m} \right\| \|K\| \leqslant \frac{1}{2\|C^{-1}\|} - \eta, \tag{6}$$

где U_i, $i = 1, \ldots, s$, — субвекторы вектора u, $\Omega_u = \{u \mid \|U_i\| \leqslant c_i,\ i = 1, \ldots, s\}$, и

$$\|\Phi(r)\| \leqslant \frac{a}{2\|C^{-1}\| \, \|B\|}. \tag{7}$$

Так как $U_i = \begin{pmatrix} K_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1} \\ \ldots \\ K_{n_1+\cdots+n_i} \end{pmatrix} x + r_i$, где K_j — j-я строка матрицы K, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, m$, то с помощью неравенств

$$\left\| \begin{pmatrix} K_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1} \\ \ldots \\ K_{n_1+\cdots+n_i} \end{pmatrix} \right\| a + b_i \leqslant c_i, \qquad i = 1, \ldots, s \tag{8}$$

и оценки (7) можем оценить границу области П. Отметим, что в данной работе используется норма Шмидта.

3. Основная теорема. Установим достаточные условия PQ-стабилизируемости системы дифференциальных уравнений (1) управлением $u = Kx + r$. Пусть для уравнения (4) с помощью метода, указанного в п. 2, определена область П. Для простоты изложения введем обозначения

$$\begin{pmatrix} K_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1} \\ \ldots \\ K_{n_1+\cdots+n_i} \end{pmatrix} = K_{n_1+\cdots+n_i}^{n_1+\cdots+n_{i-1}+1},$$

$$\Omega_u = \{u \mid \|U_i\| \leqslant \|K_{n_1+\cdots+n_i}^{n_1+\cdots+n_{i-1}+1}\| a + b_i,\ i = 1, \ldots, s\}.$$

Имеет место теорема.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *и области*

$$\Pi = \left\{ (x, p, r) \mid \Omega_x \colon \|x\| \leqslant a,\ \Omega_p = P,\ \Omega_r = \prod_{i=1}^{s} \Omega_{r_i},\ \Omega_{r_i} \colon \|r_i\| \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, s \right\}$$

выполняется условие

$$\alpha < 0, \tag{9}$$

где

$$\alpha = -\lambda_{\min}(Q) + \\ + 2\|P\| \left(\eta + \|B\| \|K\| \sum_{i=1}^{s} (\|K_{n_1+\ldots+n_i}^{n_1+\ldots+n_{i-1}+1}\| a + b_i) \max_{\Omega_u} \left\| \left(\left| \frac{\partial^2 \Phi_k(u)}{\partial u_l \partial U_i} \right| \right)_{k,l=1}^{m} \right\| \right),$$

$\lambda_{\min}(Q)$ — наименьшее собственное значение матрицы Q, Q — произвольная симметрическая положительно определенная матрица размерности $n \times n$, P — симметрическая положительно определенная матрица, являющаяся решением матричного уравнения

$$C^T P + PC = -Q. \tag{10}$$

Тогда система (1) *PQ-стабилизируется управлением $u = Kx + r$.*

Доказательство. Выберем областью изменения параметров системы (1) область $\Omega_p \times \Omega_r$. Согласно определению области Π для всех (p, r) из $\Omega_p \times \Omega_r$ существует единственное состояние равновесия системы (1) $x^e(p, r)$, т. е. условие 1 определения 1 выполнено. Заменой переменной $z = x - x^e(p, r)$ систему (1) приведем к виду

$$\dot{z} = [A + \Delta A(p)](z + x^e(p, r)) + B\Phi(Kz + Kx^e(p, r) + r). \tag{11}$$

Покажем, что производная квадратической функции

$$V(z) = z^T P z, \tag{12}$$

где P определяется из уравнения (10), вдоль решений системы (11) отрицательна. Т. е. функция (12) есть функция Ляпунова для системы (11)

$$\begin{aligned}\dot{V}(z)|_{11} &= z^T P([A + \Delta A(p)](z + x^e(p, r)) + B\Phi(Kz + Kx^e(p, r) + r)) + \\ &\quad + ([A + \Delta A(p)](z + x^e(p, r)) + B\Phi(Kz + Kx^e(p, r) + r))^T P z = \\ &= z^T P\left([A + \Delta A(p)] + B\frac{\partial \Phi(u)}{\partial u}\bigg|_{u=Kx^e(p,r)+r} K\right) z + \\ &\quad + z^T\left([A + \Delta A(p)] + B\frac{\partial \Phi(u)}{\partial u}\bigg|_{u=Kx^e(p,r)+r} K\right)^T P z + z^T P(o(z)) + (o(z))^T P z,\end{aligned} \tag{13}$$

где $o(z)$ бесконечно малая величина по сравнению с z в некоторой окрестности 0. Продолжим оценку (13).

$$\begin{aligned}\dot{V}(z)|_{11} &= z^T(C^T P + PC) z + z^T\left(\Delta A(p) + B\left(\frac{\partial \Phi(u)}{\partial u}\bigg|_{u=Kx^e(p,r)+r} - \frac{\partial \Phi(u)}{\partial u}\bigg|_{u=0}\right) K\right)^T \times \\ &\quad \times P z + z^T P\left(\Delta A(p) + B\left(\frac{\partial \Phi(u)}{\partial u}\bigg|_{u=Kx^e(p,r)+r} - \frac{\partial \Phi(u)}{\partial u}\bigg|_{u=0}\right) K\right) z + \\ &\quad + z^T P(o(z)) + (o(z))^T P z \leqslant \alpha\|z\|^2 + 2\|P\|\|z\|\|o(z)\|.\end{aligned} \tag{14}$$

Выберем окрестность Ω_z точки $z = 0$ так, чтобы для всех z из Ω_z выполнялось соотношение

$$\|o(z)\| \leqslant \frac{\alpha}{4\|P\|}\|z\|. \tag{15}$$

Из (14) и (15) получим, что в Ω_z

$$\dot{V}(z)|_{11} \leqslant \frac{\alpha}{2}\|z\|^2,$$

т. е. выполняется условие 2 определения 1. Значит, система (1) PQ-стабилизируема управлением $u = Kx + r$. Теорема доказана.

Следствие. *Для PQ-стабилизируемости системы* (1) *управлением* $u = Kx + r$ *достаточно выполнения условия*

$$-\lambda_{\min}(Q) + \frac{\|P\|}{\|C^{-1}\|} < 0. \tag{16}$$

Доказательство очевидно следует из неравенств (6) и (14), которые верны во всей области Π.

Замечание. Выполнение условия (9), согласно результатам работы [2], является достаточным для параметрической асимптотической устойчивости системы (1) относительно области $P \times \Omega_r$.

4. Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = [A + \Delta A(p)]x + B\Phi(Kx + r), \tag{17}$$

где $x = (x_1, x_2)^T$, $r \in \mathbb{R}^1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Phi(u) = \dfrac{u^2}{6} + u$.

Для устойчивой матрицы $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, согласно уравнению из условия 3 предположения 1, вычислим матрицу $K = \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}$. Пусть область P такова, что для всех p из P

$$\|\Delta A(p)\| \leqslant \frac{1}{15} < \frac{1}{2\|C^{-1}\|} = 0{,}207.$$

Применяя метод, указанный в п. 2, вычислим область

$$\Pi = \{(x, p, r) \mid \|x\| \leqslant 0{,}069,\ p \in P,\ |r| \leqslant 0{,}01\}.$$

Для матрицы $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, матрица $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Условие (16) выполняется и, следовательно, система (17) PQ-стабилизируема управлением $u = Kx + r$, при изменении параметров в области

$$P = \left\{(p, r) \mid \|\Delta A(p)\| \leqslant \frac{1}{15},\ |r| \leqslant 0{,}01\right\}.$$

На рис. 1, 2 приведены графики, которые иллюстрируют поведение решений системы (17) до стабилизации ее решений и после нее.

5. Замечания. Практически всегда при анализе динамики систем с неопределенностью и их стабилизации предполагается, что состояние равновесия указанной системы находится в начале координат и остается там несмотря на возмущения, связанные с изменениями параметров системы или применением управления. Когда рассматриваемая система линейна, это предположение либо истинно, либо может стать таким после применения соответствующего преобразования, которое перемещает состояние равновесия в начало координат. Однако если система нелинейна, то указанные выше возмущения могут существенно влиять на динамику системы, так как состояние равновесия может менять свое месторасположение либо его может не быть вовсе. По этой причине в работе [3] было сформулировано

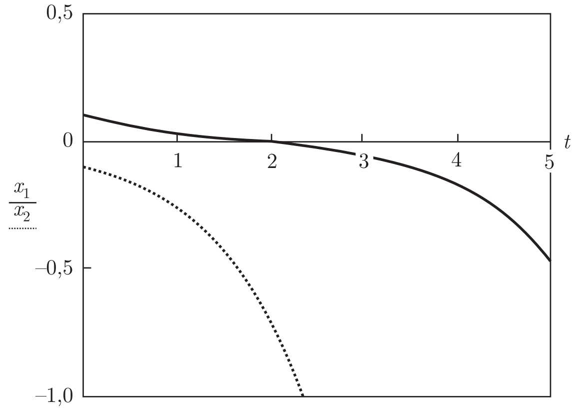

Рис. 1. Система до управления (неустойчива)

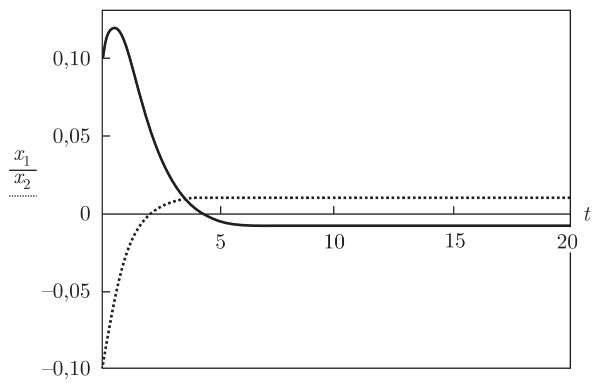

Рис. 2. Система после управления (устойчива)

понятие параметрической устойчивости, которое развивается в работах [2, 4]. В данной работе развивается понятие PQ-стабилизируемости, введенное в работе [4]. Указаны оценки области параметров, входящих как в саму систему, так и в управление, при которых исходная система может быть PQ-стабилизируема, сформулированы достаточные условия такой стабилизации относительно указанной области.

1. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – Москва: Мир, 1969. – 447 с.
2. *Мартынюк А. А., Хорошун А. С.* К теории параметрической устойчивости // Доп. НАН України. – 2007. – № 7. – С. 59–65.
3. *Ikeda M., Ohta Y., Šiljak D. D.* Parametric stability // Proc. of the Univesit á di Genova – The Ohio State University Joint Conference. – Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1991.
4. *Ohta Y., Šiljak D. D.* Parametric quadratic stabilizability of uncertain nonlinear systems // Systems and Control Letters. – 1994. – No 22. – P. 437–444.
5. *Larin V. B.* On static output-feedback stabilization of a periodic system // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, No 3. – P. 357–364.
6. *Larin V. B., Tunik A. A.* Dynamic output feedback compensation of external disturbances // Ibid. – 2006. – **42**, No 5. – P. 606–614.
7. *Dvirnyi A. I.* Conditions for the practical and technical stability of quasilinear impulsive systems // Ibid. – 2005. – **41**, No 1. – P. 104–111.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 26.04.2007