



УДК 62-501.7

© 2008

Член-корреспондент НАН України А. Е. Божко

О сингуларисном разложении скачкообразной функции

A singular expansion for the jump-like function is given. This expansion includes an exponentially increasing function and the exponentially decreasing sum of harmonic functions.

В работах [1–3] рассмотрены фрагменты, касающиеся особого разложения скачкообразной функции

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

при использовании его для решения задач по переходным процессам в электроцепях. На латыни слово “особое” пишется как “singularis”, поэтому в дальнейшем считаем целесообразным применить к особому разложению название “сингуларисное” разложение. Здесь это разложение будем рассматривать в аспекте преобразований функции $1(t)$.

Рассмотрим скачкообразную функцию $E \cdot 1(t)$, где E — заданное число. Вначале приведем графоматематический вывод предлагаемого сингуларисного разложения функции $E \cdot 1(t)$. Кстати, уже имеется применение леммы Жордана к единичной функции $1(t)$ и представление ее в виде интеграла Фурье, получаемого из формулы ряда Фурье путем предельного перехода периода T к бесконечности [4].

График функции $E \cdot 1(t)$ изображен на рис. 1, а. В соответствии с рис. 1, б представим функцию

$$E \cdot 1(t) = F_1(0, \tau) + F_2(t - \tau) = E_1(0, \tau) + E_1(t - \tau).$$

Согласно рис. 1, в, проведем экспоненту, такую, чтобы

$$E \cdot 1(t) = E(1 - \ell^{-\alpha t}) + E\ell^{-\alpha t}.$$

На графиках рис. 1, г, д функции $E(1 - \ell^{-\alpha t}) = f_1(t)$, $E\ell^{-\alpha t} = f_2(t)$. Здесь t — время; α — коэффициент затухания (обычно α значительно больше коэффициентов затухания реальных электрических цепей или других физических систем).

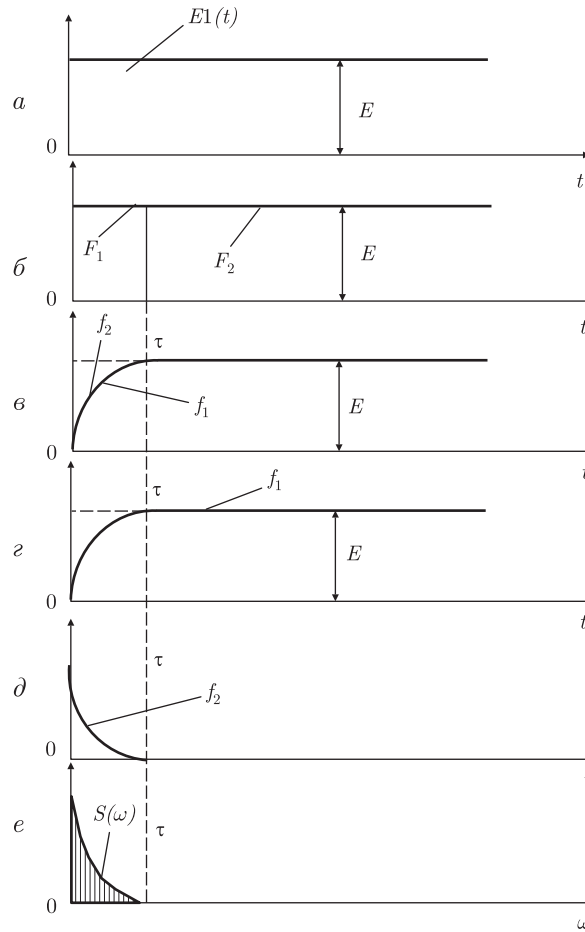


Рис. 1

Далее представляем $f_2(t) = E\ell^{-\alpha t}$ разложением на сумму затухающих гармоник ($S(\omega)$ — рис. 1, e)) в виде

$$E\ell^{-\alpha t} = \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t,$$

$$U_{ak} = \frac{U_{a1}}{k}, \quad U_{a1} = \frac{E}{\pi\omega_1}, \quad \omega_k = \omega_1 k, \quad \sum_{k=1}^n U_{ak} = E,$$

где U_{ak} — амплитуда k -й гармоники; ω_k , $k = \overline{1, n}$, — круговая частота k -й гармоники ($\omega_k = 2\pi f_k$, $f_k = [\text{Гц}]$ — частота).

Таким образом, имеем следующее представление скачкообразной функции:

$$E1(t) = E(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^n U_{ak} = E.$$

Это представление, или разложение, как было отмечено, назовем сингулярным, т. е. особым разложением скачкообразной функции. Далее рассмотрим некоторые преобразования над функцией $E \cdot 1(t)$ и соответственно над ее сингулярным разложением (1).

1. Изменение знака E обуславливает изменение знаков в слагаемых разложения

$$\pm E1(t) = \pm E(1 - \ell^{-\alpha t}) \pm \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t.$$

2. При $t = 0$ $E1(t) = E$. В разложении $\sum_{k=1}^n U_{ak} = E$, т. е. полное соответствие скачкообразной функции $E1(t)$.

3. При $t = \infty$ $E1(t) = E$. Согласно (1), разложение равно E .

4. При $\alpha = 0$ разложение равно бесконечному незатухающему спектру $\sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t$.

5. При $\alpha = \infty$ разложение равно E .

6. Сумма и разность

$$E_1 1(t) \pm E_2 1(t) = (E_1 \pm E_2)(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t} \left(\sum_{k=1}^n U_{1ak} \cos \omega_k t \pm \sum_{k=1}^n U_{2ak} \cos \omega_k t \right),$$

$$\sum_{k=1}^n U_{1ak} = E_1, \quad \sum_{k=1}^n U_{2ak} = E_2.$$

7. Умножение или деление $E \cdot 1(t)$ на число $C^{\pm m}$, где m — показатель степени, (3)

$$C^{\pm m} E1(t) = C^{\pm m} E(1 - \ell^{-\alpha t}) + C^{\pm m} \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t.$$

8. Умножение

$$E_1 1(t) \times E_2 1(t) = \left[E_1(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{1ak} \cos \omega_k t \right] \times \\ \times \left[E_2(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{2ak} \cos \omega_k t \right], \quad \sum_{k=1}^n U_{1ak} = E_1, \quad \sum_{k=1}^n U_{2ak} = E_2.$$

При $t = 0$ $E_1 1(t) \times E_2 1(t) = \left(\sum_{k=1}^n U_{1ak} \right) \times \left(\sum_{k=1}^n U_{2ak} \right)$, при $t = \infty$ $E_1 1(t) \times E_2 1(t) = E_1 \times E_2$, что соответственно подтверждается.

9. Возведение в степень l $[E_1 1(t)]^l = \left[E(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t \right]^l$.

Например, при $l = 1$ будет разложение (1), при $l = 2$ имеем

$$[E(1 - \ell^{-\alpha t})]^2 + \ell^{-2\alpha t} \left(\sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t \right)^2 + 2E(1 - \ell^{-\alpha t}) \times \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t.$$

При $t = 0$ разложение равно $\left(\sum_{k=1}^n U_{ak} \right)^2$, при $t = \infty$ — E^2 .

10. Дифференцирование по t $E \cdot 1(t)$

$$\frac{dE1(t)}{dt} = E\delta(t) = +E\alpha\ell^{-\alpha t} - \alpha\ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t - \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n \omega_k U_{ak} \sin \omega_k t,$$

где $\delta(t)$ — дельта-импульс.

При $t = 0$ производная по t разложения равна нулю. Казалось бы, в этом случае имеется несоответствие данного разложения функции $E \cdot 1(t)$. Но если считать, что $1(t) = 1$ при $t \geq 0$, то в этом случае $d1(t)/dt = 0$. Кроме того, из графика рис. 1 видно, что

$$E1(t) = f_1(t) + f_2(t) = E(1 - \ell^{-\alpha t}) + E\ell^{-\alpha t}.$$

Производные $df_1(t)/dt = \alpha E\ell^{-\alpha t}$; $df_2(t)/dt = -\alpha E\ell^{-\alpha t}$, а это значит, что

$$\frac{dE1(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[f_1(t) + f_2(t)] = 0.$$

Эти выводы математически верны. Физически же при наличии бесконечно малого переднего фронта функции $1(t)$ производная по времени $d1(t)/dt = \delta(t)$. В таком случае надо искусственно принимать при сигнале в виде $1(t)$ его производную в виде $\delta(t)$.

Чтобы убедиться в том, что в данном разложении при его дифференцировании по времени t может быть при $t = 0$ функция $\delta(t)$, считаем, что $E1(t)$ есть сумма $E - E\ell^{-\alpha t} + \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t$.

Передний фронт первого слагаемого E имеет бесконечно малый промежуток времени Δt . Поэтому можно предположить, что физически $dE/dt = E\delta(t)$ и тогда

$$\frac{dE1(t)}{dt} = \frac{d(\text{разлож.})}{dt} = E\delta(t) + E\alpha\ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t - \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n \omega_k U_{ak} \sin \omega_k t.$$

При таком выражении при $t = 0$ производная разложения равна $\delta(t)$.

11. Интегрирование $E1(t)$ по t и ее данное разложение

$$\begin{aligned} \int_0^t E1(t)dt + Et, & \quad \int_0^t \left[E(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t \right] dt = \\ & = Et + \frac{E}{\alpha} \ell^{-\alpha t} + \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak}}{1 + \alpha\omega_k} \left(\frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} - \omega_k \cos \omega_k t \right). \end{aligned}$$

$$\text{При } t = 0 \int_0^t E1(t) = E \cdot 0 = 0.$$

$$\int \text{разлож.} = Et|_0 + \frac{E}{\alpha} - \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak}}{\alpha} = 0,$$

так как $\sum_{k=1}^n U_{ak} = E$, и $\alpha \gg 1/\omega_k$, $k = \overline{1, n}$.

При $t = \infty$ оба интеграла равны ∞ , т. е. также имеется соответствие между $E1(t)$ и представленным разложением.

Как было отмечено в работе [5], сингулярное разложение может быть применимо к описанию дискретных алгоритмов оптимального управления динамическими объектами. Эти алгоритмы в общем виде описываются выражением

$$U_{\text{опт}}(t) = \pm U_{\text{max}} \text{sign } f(t),$$

где sign — знак функции $f(t)$

$$\left[\begin{array}{lll} 1 & \text{при} & f(t) > 0 \\ \text{sign } f(t) = & 0 & \text{при} & f(t) = 0 \\ -1 & \text{при} & f(t) < 0 \end{array} \right].$$

В этом случае

$$U_{\text{опт}}(t) = \left[U_{\text{max}}(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t \right] \text{sign } f(t),$$

$$\sum_{k=1}^n U_{ak} = U_{\text{max}}.$$

Сингулярное разложение скачкообразной функции можно распространить на входные гармонические сигналы (воздействия) электроцепей, радиочепей переменного тока, механических звеньев и др. При этом заметим, что сигнал должен иметь вид $U_{\text{вх}} = U_a \sin(\omega t \pm \varphi)$ при $\varphi \neq (0, \pi)$. Как видно из этого выражения, при $t = 0$ $U_{\text{вх}} = U_a \sin(\pm \varphi)$, т. е. в этот момент функция $U_a \sin(\pm \varphi)$ является скачкообразной, а именно, $U_a 1(t) \sin(\pm \varphi)$. Это значит, что функцию $U_{\text{вх}} = U_a \sin(\omega t \pm \varphi)$ при $\varphi \neq (0, \pi)$ можно представить в виде следующего разложения:

$$U_{\text{вх}} = U_a \sin(\omega t \pm \varphi) = U_a \sin(\omega t \pm \varphi)(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t} \sin(\pm \varphi) \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t, \quad (2)$$

где

$$U_{a1} = \frac{U_a}{\pi \omega_1}; \quad U_k = \frac{U_{a1} \cdot \omega_1}{\omega_k}; \quad \sum_{k=1}^n U_{ak} = U_a.$$

Проверим это разложение. При $t = 0$ $U_{\text{вх}} = \sin(\pm \varphi) \sum_{k=1}^n U_{ak} = U_a \sin(\pm \varphi)$, при $t = \infty$ $U_{\text{вх}} = U_a \sin(\omega t \pm \varphi)$.

Как видим, разложение (2) соответствует $U_a \sin(\omega t \pm \varphi)$.

В работе [6] к селектирующим функциям $\text{si}(t)$ относятся функции $\text{sgn } f(t)$, а также

$$\left[\begin{array}{lll} 1 & \text{при} & f(t) > 0 \\ \text{sg } f(t) = & 0,5 & \text{при} & f(t) = 0 \\ 0 & \text{при} & f(t) < 0 \end{array} \right].$$

Видно, что эти функции отображаются скачкообразной функцией $C1(t)$, где $C = 0; 0,5; 1$. А это значит, что, используя правило п. 7, можно селектирующие функции $si(t)$ в некоторых случаях представлять в виде сингулярного разложения (1). Однако следует заметить, что если обратить внимание на работы [1–3], то началом формирования представляемого разложения скачкообразной функции $E1(t)$ послужила попытка привести в соответствие результаты решения задач по переходным процессам в электроцепях к реальности, т. е. математически показать наличие в начале переходного процесса любой цепи участка медленного нарастания тока с последующим быстрым изменением скорости нарастания этого тока. Физика такого процесса связана с тем, что во входном скачкообразном сигнале внутренне имеется ряд затухающих гармоник, сопротивление электроцепи которым в начальный момент переходного процесса значительно больше (имеется в виду RL -цепь), чем в последующие моменты. Это связано с эффектом реструктуризации электроцепи при полигармоническом и входном воздействиях [7–9]. На наш взгляд, предлагаемое разложение скачкообразной функции как математически, так и при проверке в эксперименте, более точно отражает решение задачи по переходным процессам как в электроцепях, так и в механических системах при внешнем ударном воздействии.

1. Божко А. Е. К концепции о переходных процессах в электроцепях / Доп. НАН України. – 2003. – № 12. – С. 72–75.
2. Божко А. Е. Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях // Там само. – 2004. – № 9. – С. 83–87.
3. Божко А. Е. О новой трактовке переходных процессов в электрических цепях переменного тока // Там само. – 2005. – № 4. – С. 81–86.
4. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. – Москва: Наука, 1965. – 780 с.
5. Божко А. Е. О некоторых особенностях в реализации дискретных оптимальных управлений колебательными системами // Доп. НАН України. – 2007. – № 1. – С. 40–43.
6. Мищенко В. А. Метод селектирующих функций в нелинейных задачах контроля и управления. – Москва: Сов. радио, 1973. – 184 с.
7. Божко А. Е. Об автоматической реструктуризации электрических цепей с реактивными элементами при полигармонических входных сигналах // Доп. НАН України. – 2002. – № 11. – С. 101–103.
8. Божко А. Е. Эффект автоматической реструктуризации механических систем, работающих в условиях действия полигармонических вибраций и ударов // Там само. – 2005. – № 1. – С. 47–49.
9. Божко А. Е. Об условных сопротивлениях электроцепей при полигармонических входных сигналах // Там само. – 2007. – № 2. – С. 87–89.

*Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

Поступило в редакцию 10.04.2007