УДК 539.3

Н. Б. Жукова

Асимптотические нелинейные уравнения равновесия оболочек с геометрическими несовершенствами при взаимодействии форм потери устойчивости

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

The asymptotic equilibrium equations of shells with geometric imperfections which take the interaction of buckling modes in a neighborhood of the critical point into account are derived. This derivation is based on the principle of virtual works and a Timoshenko — type theory of shells. The obtained system of equations can be used for the analysis of a nonlinear deformation of shells with imperfections in the prebuckling and initial postbuckling states.

Асимптотический метод анализа нелинейного деформирования упругих конструкций в окрестности бифуркационных или предельных нагрузок разработан в работах В. Т. Койтера [1]. Метод применим в тех случаях, когда минимальное собственное число λ_c линеаризованной задачи — изолированное или, если этому числу соответствует множество собственных векторов ($\lambda_i = \lambda_c$). Для многих конструкций, таких как подкрепленные оболочки или оболочки из композиционных материалов [2–4], собственные числа в общем случае не совпадают, но весьма близки. В работе [5] предложен вариант асимптотического метода, в котором учитывается различие собственных чисел линеаризованной задачи. Методика авторов [5] эквивалентна методике Койтера [1], когда рассматривается изолированное собственное число λ_1, а также, когда для нескольких форм собственные значения $\lambda_i = \lambda_c$. При совпадающих или близких значениях λ_i имеет место нелинейное взаимодействие между формами потери устойчивости. В этом случае конструкция может обладать очень высокой чувствительностью к геометрическим несовершенствам. При выводе основных уравнений теории в работе [5] используется принцип минимума потенциальной энергии. В работе [6] построение соотношений теории выпучивания и послекритического поведения основано на принципе виртуальных работ. Однако случай близких собственных значений с учетом полей второго порядка в работе [6] не рассматривался. В связи с этим ниже приводится вывод асимптотических соотношений теории нелинейного деформирования конструкций с использованием принципа виртуальных работ, когда идеальная конструкция может терять устойчивость по почти одновременным формам.

В соответствии с гипотезами теории оболочек типа Тимошенко, вектор перемещений u имеет своими компонентами тангенциальные перемещения поверхности приведения u, v, нормальный прогиб w и углы поворота поперечных сечений вокруг координатных линий θ и ψ. Совокупность компонентов деформации представим в виде вектора $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, k_{11}, k_{22}, \tau_1, \tau_2)$, а компонентов усилий и моментов, заменяющих компоненты тензора напряжений, в виде вектора $\sigma = (T_{11}, T_{22}, T_{12}, T_{13}, T_{23}, M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21})$. Система уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние оболочки, может быть представлена в виде

$$\sigma\delta\varepsilon - \lambda\Delta'\delta u = 0, \tag{1}$$

$$\sigma = H\varepsilon, \tag{2}$$

$$\varepsilon = \varepsilon(u). \tag{3}$$

Здесь вариационное уравнение (1) — это выражение принципа виртуальных работ, из которого следуют уравнения равновесия, уравнение (2) — матричная запись обобщенного закона Гука, где H — матрица жесткостей слоистой оболочки, оператор $\varepsilon(u)$ включает линейные и квадратичные слагаемые. Предполагается, что нагрузка на оболочку пропорциональна параметру λ. Обобщенное перемещение оболочки задается в виде оператора $\Delta(u)$, штрих над оператором Δ обозначает производную Фреше. Воспользовавшись этим понятием, в операторе $\varepsilon(u)$ можно выделить линейную и квадратичную части

$$\varepsilon(u) = \varepsilon'(0)u + \frac{1}{2}\varepsilon'' u^2. \tag{4}$$

Аналогично

$$\Delta(u) = \Delta'(0)u + \frac{1}{2}\Delta'' u^2. \tag{5}$$

Если поле начальных несовершенств характеризуется вектором $\widetilde{u}$, для деформаций и обобщенного перемещения выводятся выражения

$$\varepsilon(u, \widetilde{u}) = \varepsilon(u) + \varepsilon'' u\widetilde{u}, \qquad \Delta(u, \widetilde{u}) = \Delta(u) + \Delta'' u\widetilde{u}. \tag{6}$$

Вектор напряжений $\widetilde{\sigma}$ для оболочки с несовершенствами связан с вектором деформаций $\varepsilon(u, \widetilde{u})$ с помощью той же матрицы

$$\widetilde{\sigma} = H\varepsilon(u, \widetilde{u}). \tag{7}$$

Выражение принципа виртуальных работ принимает вид

$$\widetilde{\sigma}\varepsilon'(u, \widetilde{u})\delta u - \lambda\Delta'(u, \widetilde{u})\delta u = 0. \tag{8}$$

Модифицированные таким образом уравнения (6)–(8) позволяют решать различные нелинейные задачи о деформировании оболочек с начальными геометрическими несовершенствами. Отметим, что уравнения (1)–(3) или (6)–(8) в таком виде, как они записаны, применимы к расчету любых конструкций при использовании какой-либо прикладной теории или же исходных соотношений упругости. При этом следует конкретизировать компоненты векторов u, ε, σ. К уравнениям (1)–(3) применим метод асимптотического анализа, предложенный в работе [5]. Полагаем, что докритическое напряженно-деформированное состояние оболочки является линейным. Пусть при $\lambda = 1$ поля перемещений, деформаций и напряжений характеризуются векторами u_0, ε_0, σ_0. Линеаризуя уравнения (1)–(3) в окрестности нагрузки бифуркации, для определения критических значений λ_i и соответствующих мод выпучивания u_i получаем совокупность уравнений

$$\sigma_i\varepsilon'(0)\delta u + \lambda_i\sigma_0\varepsilon'' u_i\delta u - \lambda_i\Delta'' u_i\delta u = 0, \tag{9}$$

$$\sigma_i = H\varepsilon_i, \tag{10}$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon'(0)u_i, \qquad i = 1, \ldots, M. \tag{11}$$

Эти M форм взаимно ортогональны в смысле

$$\sigma_0 \varepsilon'' u_i u_j - \Delta'' u_i u_j = 0, \qquad i \neq j. \tag{12}$$

Амплитуды ξ_i мод u_i при решении однородной задачи (9)–(11) остаются неопределенными и могут быть найдены только при решении исходной нелинейной задачи (1)–(3). Вектор перемещений представляется в виде асимптотического разложения

$$u = \lambda u_0 + \xi_i u_i + \xi_i \xi_j u_{ij}. \tag{13}$$

Здесь и ниже применяется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Если решена однородная краевая задача (9)–(11), причем собственные векторы нормированы определенным образом, и неоднородная задача, то относительно амплитуд ξ_i можно получить систему неоднородных алгебраических уравнений

$$\xi_r \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_r}\right) + \xi_i \xi_j a_{ijr} + \xi_i \xi_j \xi_k b_{ijkr} = 0, \qquad r = 1, \ldots, M, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} &a_{ijr} = -\frac{A_{ijr}}{2D}, \qquad b_{ijr} = -\frac{B_{ijr}}{D}, \\ &A_{ijr} = \sigma_r \varepsilon'' u_i u_j + 2\sigma_i \varepsilon'' u_j u_r, \qquad D = \lambda_r (\sigma_0 \varepsilon'' u_r^2 - \Delta'' u_r^2), \\ &B_{ijkr} = \sigma_i \varepsilon'' u_r u_{jk} + \sigma_{ij} \varepsilon'' u_k u_i + \sigma_r \varepsilon'' u_i u_{jk}. \end{aligned} \tag{15}$$

Поле начальных несовершенств $\widetilde{u}$ представляется в виде разложения по собственным векторам задачи

$$\widetilde{u} = \overline{\xi} u_i. \tag{16}$$

Для упругих перемещений предполагаются справедливыми асимптотические разложения (13). Функции u_i и u_{ij} являются решениями указанных выше задач. С учетом преобразований, аналогичных выполненным выше при получении системы однородных уравнений (14), имеем

$$\xi_r \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_r}\right) + \xi_i \xi_j a_{ijr} + \xi_i \xi_j \xi_k b_{ijkr} = \overline{\xi}_r \frac{\lambda}{\lambda_r}, \qquad r = 1, \ldots, M. \tag{17}$$

Система нелинейных уравнений (17) полностью тождественна системе (6) работы [5]. Уравнения (17) можно использовать для исследования нелинейного деформирования несовершенных конструкций в докритическом состоянии, для расчета критических (бифуркационных или предельных) нагрузок, а также для расчета начального закритического поведения рассматриваемых конструкций. Факт тождественности уравнений (17) данной работы и уравнений (6) работы [5] подтверждает эквивалентность подходов, основанных на принципе минимума потенциальной энергии и принципе виртуальных работ.

Проанализируем структуру уравнений (17) на примере расчета устойчивости и нелинейного деформирования цилиндрических оболочек при шарнирном опирании торцов. В этом случае компоненты вектора u_i могут быть аппроксимированы тригонометрическими рядами

$$\begin{aligned}
&U_i = A^i_{m,n}\cos l_m\xi_i \cos n_i\varphi, \quad V_i = B^i_{m,n}\cos l_m\xi_i \cos n_i\varphi, \quad W_i = C^i_{m,n}\cos l_m\xi_i \cos n_i\varphi,\\
&\theta_i = D^i_{m,n}\cos l_m\xi_i \cos n_i\varphi, \qquad \psi_i = E^i_{m,n}\cos l_m\xi_i \cos n_i\varphi,
\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$l_m = \frac{m\pi R}{L}, \qquad \xi = \frac{x}{R}, \qquad \varphi = \frac{y}{R},$$

x, y — продольная и окружная координатные линии на поверхности приведения оболочки.

Собственные числа λ_i и соответствующие значения амплитуд A^i_{mn}, B^i_{mn}, C^i_{mn}, D^i_{mn}, E^i_{mn} находятся из решения системы однородных дифференциальных уравнений, вытекающих из вариационного уравнения (9). Для нормирования этих величин используется условие $(w_i)_{\max} = 1$. Решение неоднородной задачи с учетом вида правой части и шарнирного опирания торцов может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned}
&U_{ij} = \sum_k [A^{ij}_{k,1}\cos(n_i - n_j)\varphi + A^{ij}_{k,2}\cos(n_i + n_j)\varphi]\cos l_k\xi,\\
&V_{ij} = \sum_k [B^{ij}_{k,1}\sin(n_i - n_j)\varphi + B^{ij}_{k,2}\sin(n_i + n_j)\varphi]\sin l_k\xi,\\
&W_{ij} = \sum_k [C^{ij}_{k,1}\cos(n_i - n_j)\varphi + C^{ij}_{k,2}\cos(n_i + n_j)\varphi]\sin l_k\xi,\\
&\theta_{ij} = \sum_k [D^{ij}_{k,1}\cos(n_i - n_j)\varphi + D^{ij}_{k,2}\cos(n_i + n_j)\varphi]\cos l_k\xi,\\
&\psi_{ij} = \sum_k [E^{ij}_{k,1}\sin(n_i - n_j)\varphi + E^{ij}_{k,2}\sin(n_i + n_j)\varphi]\sin l_k\xi.
\end{aligned} \tag{19}$$

Индекс суммирования k в рядах (19) принимает только четные значения, если сумма $m_i + m_j$ является нечетным целым числом, и нечетные — при $m_i + m_j$-четном.

Рассмотрим взаимодействие осесимметричной формы потери устойчивости, которой отвечает критическая нагрузка λ_1 и волновые числа m_1, $n_1 = 0$, с неосесимметричной формой, которой соответствует критическая нагрузка λ_2 и волновые числа m_2, n_2. Вычисление коэффициентов a_{ijr} по формуле (15) показывает, что не все они равны нулю при таких сочетаниях m_i и m_j $(i, j = 1, 2)$, что сумма $2m_i + m_j$ является нечетным числом. Что касается коэффициентов b_{ijkr}, то они могут быть не равными нулю и при четных значениях m_1 и m_2. С учетом особенностей решения однородной задачи (9) при рассматриваемых формах выпучивания система уравнений (17) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\xi_1\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) + \xi_2^2 a_{221} + \xi_1\xi_2^2(b_{2211} + b_{2121} + b_{1221}) = \frac{\lambda}{\lambda_1}\overline{\xi}_1,\\
&\xi_2\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) + \xi_1\xi_2(a_{122} + a_{212}) + \xi_1^2\xi_2(b_{1122} + b_{1212+b_{2112}}) + \xi_2^2 b_{2222} = \frac{\lambda}{\lambda_2}\overline{\xi}_2.
\end{aligned} \tag{20}$$

При $\overline{\xi}_1 \neq 0$, $\overline{\xi}_2 \neq 0$ с ростом нагрузки λ деформирование развивается по осесимметричной и неосесимметричной формам. После достижения предельного значения нагрузки λ_s

амплитуды ξ_1, ξ_2 будут возрастать при уменьшении нагрузки. Если $\overline{\xi}_1 \neq 0$, $\overline{\xi}_2 = 0$, то вначале развиваются осесимметричные деформации до некоторого значения нагрузки $\overline{\lambda}_c$, такого, что

$$1 - \frac{\lambda}{\lambda_2} + \xi_1(a_{122} + a_{212}) + \xi_1^2(b_{1122} + b_{1211} + b_{2112}) = 0. \tag{21}$$

При выполнении условия (21) происходит бифуркация на моду ξ_2 и затем деформация оболочки происходит по обеим формам с уменьшением нагрузки. В случае $\overline{\xi}_1 = 0$, $\overline{\xi}_2 \neq 0$ из уравнений (20) следует, что будет достигнута предельная точка при деформировании по обеим формам ξ_1 и ξ_2.

В качестве второго примера рассмотрим взаимодействие двух неосесимметричных мод с волновыми числами m_1, n_1 и m_2, n_2. Если оболочка изотропная, то минимальному собственному числу соответствует множество форм потери устойчивости, расположенных на окружности Койтера

$$l_m^2 - \sqrt{\frac{2CR}{t}} l_m + n^2 = 0, \tag{22}$$

где

$$C = \sqrt{3(1 - \nu^2)}. \tag{23}$$

Как следует из (22), одному значению n соответствуют два значения m. Поэтому примем $n_1 = n_2$. Система уравнений (20) приводится к виду

$$\begin{aligned}
&\xi_1\left(1 - \frac{\lambda}{\xi_1}\right) + \xi_1^3 b_{1111} + \xi_1^2\xi_2(b_{1121} + b_{1211} + b_{2111}) + \xi_1\xi_2^2\left(b_{2211} + b_{2121} + b_{1221}\right) + \\
&\qquad + \xi_2^3 b_{2221} = \frac{\lambda}{\lambda_1}\overline{\xi}_1, \\
&\xi_2\left(1 - \frac{\lambda}{\xi_1}\right) + \xi_1^3 b_{1112} + \xi_1^2\xi_2(b_{1122} + b_{1212} + b_{2112}) + \xi_1\xi_2^2\left(b_{2212} + b_{2122} + b_{1222}\right) + \\
&\qquad + \xi_2^3 b_{2222} = \frac{\lambda}{\lambda_1}\overline{\xi}_2.
\end{aligned} \tag{24}$$

Как видим, при $\overline{\xi}_1 = \overline{\xi}_2 = 0$ начальное закритическое поведение оболочки характеризуется развитием обеих мод. Если $\overline{\xi}_1$ и/или $\overline{\xi}_2$ не равны нулю, то достижение предельной точки происходит также по обеим модам. Отличным от этого является взаимодействие двух неосесимметричных мод при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $n_1 \neq n_2$. В этом случае будут равны нулю коэффициенты при $\xi_1^2\xi_2$ и ξ_2^3 в первом уравнении и при ξ_1^3 и $\xi_1\xi_2^2$ — во втором. Если $\overline{\xi}_1 \neq 0$, $\overline{\xi}_2 = 0$, $\lambda_1 < \lambda_2$, то в этом случае может быть достигнута предельная точка λ_sтолько по моде ξ_1, а ξ_2 появится в закритическом состоянии при

$$\left[1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_2} + \xi_1^2(b_{1122} + b_{1212} + b_{2111})\right] = 0. \tag{25}$$

Условие (25) может реализоваться и до достижения предельной точки, что приведет к бифуркации на моду ξ_2.

Проведенный анализ показывает, что система асимптотических уравнений (17), полученная по методу [5], позволяет описывать широкий круг задач нелинейного деформирования конструкций с несовершенствами, включая докритическое состояние, бифуркационные и предельные точки, начальное закритическое поведение с учетом взаимодействия различных мод выпучивания.

1. *Koiter W. T.* Elastic stability and post-buckling behavior // Proc. Symp. Nonlinear Probl. – Madison, 1963. – P. 257–275.
2. *Ванин Г. А., Семенюк Н. П.* Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. – Киев: Наук. думка, 1987. – 200 с.
3. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – Киев: Наук. думка, 1984. – 220 с.
4. *Семенюк Н. П., Жукова Н. Б.* К задаче о взаимодействии форм потери устойчивости для несовершенных цилиндрических оболочек из композитов // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 8. – С. 69–75.
5. *Byskov E., Hutchinson J. W.* Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells // AIAA J. – 1977. – **16**, No 7. – P. 941–948.
6. *Budiansky B., Amazigo J.* Initial post-buckling behavior of cylindrical shells under external pressure // J. Mat. And Phys. – 1968. – **47**. – P. 223–235.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.07.2007

УДК 628.162

Член-кореспондент НАН України **О. Я. Олійник, С. О. Рибаченко**

Теоретичний аналіз процесів доочистки стічних вод

A general mathematical model of the additional treatment of waste water to remove organic contaminants by filtration is developed. Simpler models of the removal of organic contaminants using filter beds derived from the general model are presented.

У багатьох випадках ступінь вилучення органічних і біогенних забруднень в існуючих спорудах механічної і біологічної очистки не задовольняє потрібні нормативні вимоги і тому необхідна їх додаткова очистка. Провідна роль в такому доочищенні стічних вод належить процесу фільтрації через зернисті і інші типи завантаження [1]. В процесах доочистки фільтруванням господарсько-побутових стічних вод, забруднених переважно легкоокислюваними речовинами, в основному відбувається біоокислення (деструкція) забруднень органічного походження. Високий ефект вилучення органічних забруднень в затоплених фільтрах пов'язаний з утворенням високої концентрації біомаси в одиниці об'єму фільтра у вигляді біоплівки, яка утворюється на поверхні часток завантаження. Для росту і життєдіяльності цієї біомаси необхідно забезпечити безперебійне постачання кисню і контролювати його споживання в кількості, яка необхідна для підтримки високої швидкості утилізації забруднень. Нижче розглядається утилізація органічних забруднень, які надходять на доочистку зі стічними водами з БПКповн від 15…50 мг/л до 1…5 мг/л [1]. Для описання процесів вилучення таких забруднень на біоплівковій моделі необхідно встановити баланс зміни (утилізації) забруднень і (трансформації) кисню в біоплівці, рідинній плівці і в об'ємі фільтра.