ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2008

ЕНЕРГЕТИКА

УДК 621.318.001.2

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

Анализ возможного воспроизведения удара электромагнитным вибровозбудителем при прямоугольном входном сигнале

The features in the impact formation by an electromagnetic vibroexciter on a jump-like input signal are shown.

Применение электромагнитных вибровозбудителей (ЭМВ) в качестве источников механических ударов является актуальной задачей. Комплексное воспроизведение ударов совместно с вибрациями важно для динамических испытаний на надежность транспортных средств. В связи с этим анализ возможностей ЭМВ при воспроизведении, в частности, прямоугольной формы удара полезен для понимания процессов, происходящих в системе ЭМВ.

Прямоугольный импульс $U(t)$ может быть представлен в виде разности двух скачкообразных функций (см. рис. 1)

$$U(t) = U1(t) - U1(t-\tau), \tag{1}$$

где t — время; τ — длительность импульса; $1(t)$ — единичная скачкообразная функция $\left\{1(t) = \begin{matrix} 1 & \text{при} & t > 0 \\ 0 & \text{при} & t \leqslant 0 \end{matrix}\right\}$.

В работах [1, 2] скачкообразная функция $U1(t)$ выражается в виде особого разложения

$$\begin{gathered} U1(t) = (1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t, \\ \sum_{k=1}^{n} U_{ak} = U; \qquad U_{a1} = \frac{U}{\pi\omega_1}; \qquad U_{ak} = \frac{U_{a1}}{\omega_k}, \end{gathered} \tag{2}$$

где α — коэффициент затухания; ω_k — круговая частота ($\omega_k = 2\pi f_k$, f_k — частота, Гц). Если применить разложение (2) к записи (1), то (1) будет иметь вид

$$U(t) = U(1-\ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t - U[1-\ell^{-\alpha(t-\tau)}] - \ell^{-\alpha(t-\tau)}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k(t-\tau). \tag{3}$$

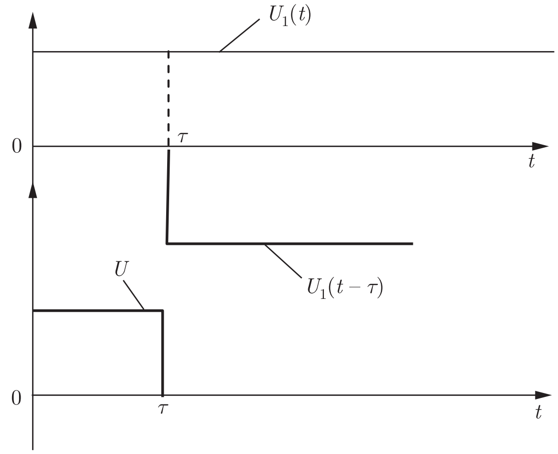

Рис. 1

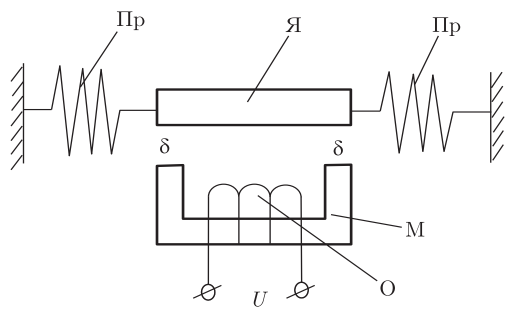

Рис. 2

Именно такого вида (3) прямоугольный импульс $U(t)$ подается на обмотку ЭМВ. Электромагнитомеханическая схема ЭМВ изображена на рис. 2, где М — магнитопровод; Я — якорь (подвижная платформа); Пр — пружина; О — обмотка; δ — воздушный зазор. Уравнение электрической цепи обмотки О при подаче на нее импульса (3) имеет вид

$$U(1-\ell^{-\alpha t})+\ell^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n}U_{ak}\cos\omega_k t-U[1-\ell^{-\alpha(t-\tau)}]-$$
$$-\ell^{-\alpha(t-\tau)}\sum_{k=1}^{n}U_{ak}\cos\omega_k(t-\tau)=ri+L\frac{di}{dt}. \tag{4}$$

Здесь r — активное сопротивление цепи обмотки О; L — индуктивность обмотки О; i — электрический ток в обмотке О.

В соответствии с законом полного тока [3]

$$iwG=\Phi, \tag{5}$$

где Φ — магнитный поток в ЭМВ; w — число витков обмотки О; G — магнитная проводимость в ЭМВ; $G=\mu_0 S/(2\delta)$ (μ_0 — магнитная проницаемость воздуха; S — площадь поперечного сечения полюса магнитопровода М у воздушного зазора δ). Ток i через Φ создает в ЭМВ тяговое усилие [4] $F = \Phi^2/(\mu_0 S)$, или, с учетом (5),

$$F = \mu_0 S \left(\frac{iw}{2\delta}\right)^2. \tag{6}$$

Это тяговое усилие, действуя на якорь Я, являющийся колебательной системой, вызывает перемещение x якоря и в соответствии с уравнением движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = F, \tag{7}$$

где m — масса якоря совместно с массой объекта, находящегося на якоре; b, c — коэффициенты диссипации и упругости соответственно.

Как видно из (4), (6), (7), выражение для формируемого удара в виде x может быть найдено в результате решений уравнений (4) и (7) с использованием (6). Решение указанных уравнений будем осуществлять операционным методом Карсона [5]. Представим уравнения (4) и (6) в виде изображений Карсона. При этом введем рассмотрение процесса прохождения импульса до момента τ и после этого момента. Тогда решение будет распадаться на две части, а именно: решение уравнения

$$U[1 - \ell^{-\alpha t}] + \ell^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t = ri + L\frac{di}{dt} \tag{8}$$

и уравнения, возникшего в результате действия $U1(t)$ и $1(t-\tau)$ в момент τ и после него. В момент τ начальным условием для решения (7) является решение уравнения (8). При таком рассуждении уравнение (8) в изображениях Карсона имеет вид

$$\frac{U\alpha}{p+\alpha} + \sum_{k=1}^{n}\frac{U_{ak}p(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2+\omega_k^2} = (r+pL)I,$$

откуда изображение тока I запишется соотношением

$$I = \frac{U\alpha}{(p+\alpha)(pL+r)} + \frac{1}{(pL+r)}\sum_{k=1}^{n}\frac{U_{ak}p(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2+\omega_k^2}. \tag{9}$$

Оригинал тока $i(t)$, соответствующий изображению (9), определяем по таблицам [5] выражением

$$\begin{aligned} i(t) = \frac{U\alpha}{L}\left[\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\alpha}\ell^{-\alpha t} - \frac{1}{\beta}\ell^{-\beta t}\right)\right] + \\ + \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n}\left\langle\frac{U_{ak}\alpha}{(\alpha-\beta)^2+\omega_k^2}\left\{\ell^{-\beta t} + \frac{\ell^{-\alpha t}}{\omega_k}[-\omega_k\cos\omega_k t + (\beta-\alpha)\sin\omega_k t]\right\} + \right. \\ \left. + \frac{U_{ak}}{(\alpha-\beta)^2+\omega_k^2}\left\{-\beta\ell^{-\beta t} + \frac{\ell^{-\alpha t}}{\omega_k}[\omega_k\cos_k t + (\omega_k^2+\alpha^2-\alpha\beta)\sin\omega_k t]\right\}\right\rangle, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\beta = r/L$ — коэффициент затухания в цепи 0.

Далее, подставляя (10) в (6), находим тяговое усилие в виде

$$F = \mu_0 S\left(\frac{w}{2\delta}\right)^2 [(10)]^2, \tag{11}$$

где $[(10)]^2$ — квадрат тока $i(t)$, выражаемого соотношением (10).

Проверим правильность (11) с учетом (10). При $t - 0$ $F = 0$, при $t = \infty$ (т. е. рассматривается, что при τ переходный процесс прошел) $F = \mu_0 S\left(\dfrac{w}{2\delta}\dfrac{U}{r}\right)^2$. Эта проверка показывает правильность нашего решения. Если посчитать, что $\alpha = \infty$, то $F = \mu_0 S\left(\dfrac{w}{2\delta}\dfrac{U}{r}\right)^2$, т. е. получается такое выражение F, как в случае $U1(t) = U$. При $t \geqslant \tau$ $|U1(t)| = |U1(t-\tau)|$ и ток

$$\begin{aligned} i(\tau) = \frac{U}{r} - \frac{U\alpha}{L}\left[\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\alpha}\ell^{-\alpha\tau} - \frac{1}{\beta}\ell^{-\beta\tau}\right)\right] - \\ + \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n}\left\langle \frac{U_{ak}\alpha}{(\alpha+\beta)^2+\omega_k^2}\left\{\ell^{-\beta\tau} + \frac{\ell^{-\alpha\tau}}{\omega_k}[-\omega_k\cos\omega_k\tau + (\beta-\alpha)\sin\omega_k\tau]\right\} + \right. \\ \left. + \frac{U_{ak}}{(\alpha-\beta)+\omega_k^2}\left\{-\beta\ell^{-\beta\tau} + \frac{\ell^{-\alpha\tau}}{\omega_k}[\omega_k\cos\omega_k\tau + (\omega_k^2+\alpha^2-\alpha\beta)\sin\omega_k\tau]\right\}\right\rangle, \end{aligned} \tag{12}$$

а тяговое усилие при $t = \tau$ определяется выражением $F = \mu_0 S(w/(2\delta))^2[(12)]^2$, где $[(12)]^2$ — квадрат тока $i(\tau)$, выражаемого соотношением (12).

Из (12) получается, что при $t = \infty$ $i(\infty) = 0$, а вблизи $t \geqslant \tau$ $i(t \geqslant \tau) = (U/r)\ell^{-\beta\tau}$ и в конце импульса (на его спаде) тяговое усилие

$$F \approx \mu_0 S\left(\frac{wU}{2\delta r}\ell^{-\beta t}\right)^2. \tag{13}$$

Далее, имея выражения (11), (13), можно определить перемещение x якоря (Я) путем решения уравнения (7). Для упрощения и сокращения математических выкладок представим (10) в виде

$$i(t) = i_0(t) + \sum_{k=1}^{n} I_{ak}\ell^{-\alpha t}\sin\omega_k^t, \tag{14}$$

где

$$i_0(\tau) = \frac{U\alpha}{L}\left[\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\alpha}\ell^{-\alpha t} - \frac{1}{\beta}\ell^{-\beta t}\right)\right] + \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n}\frac{U_{ak}(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2+\omega_k^2}\ell^{-\beta t},$$

$$I_{ak} = \frac{U_{ak}\cdot\alpha}{L\omega_k}(\beta - \alpha + \omega_k^2 + \alpha^2 - \beta^2)\frac{1}{(\alpha-\beta)^2+\omega_k^2}.$$

Тяговое усилие F с учетом (14) записывается соотношением

$$F = j\left[i_0(t) + \sum_{k=1}^{n} I_{ak}\ell^{-\alpha t}\sin\omega_k^t\right]^2,$$

где $j = \mu_0 S(w/(2\delta))^2$ или, после возведения его в квадрат,

$$F = j\left[i_0^2(t) + 2i_0(t)\sum_{k=1}^{n} I_{ak}\ell^{-\alpha t}\sin\omega_k^t + \left(\sum_{k=1}^{n} I_{ak}\ell^{-\alpha t}\sin\omega_k^t\right)^2\right]. \tag{15}$$

Поскольку последнее слагаемое в (15) является квадратом суммы, то после тригонометрических преобразований в этом слагаемом имеются чисто экспоненциальные составляющие $(1/2)I_{ak}^2\ell^{-2\alpha t}$, экспоненциально затухающие гармоники с частотами $2\omega_k$, $(\omega_k+\omega_l)/2$, $(\omega_k-\omega_l)/2$, $k \neq l$, $k = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,n}$. Заметим, что в слагаемое $i_0^2(t)$ в (15) входят, кроме постоянных, экспоненциально-затухающие составляющие.

Так как уравнение (7) является линейным, то при его решении может быть применен метод суперпозиции, т. е. реакция $x(t)$ колебательной системы ЭМВ на сложное тяговое усилие F может быть равна сумме реакций x_S, $s = \overline{0,m}$, $m > n$ на каждую составляющую тягового усилия. Известно [6], что реакция колебательной системы типа (7) на постоянную составляющую F_0 воздействия записывается в виде

$$x_0 = \frac{mF_0}{c}\left[1 - \ell^{\frac{b}{2m}t}\left(\cos\omega_{01}t + \frac{b}{2m\omega_{01}}\sin\omega_{01}t\right)\right],$$

где $\omega_{01} = \sqrt{\dfrac{c}{m} - \left(\dfrac{b}{2m}\right)^2}$.

Реакция колебательной системы (7) на экспоненциально-затухающие воздействия $F_{e\alpha} = F_{ea\alpha}\ell^{-\alpha t}$, $F_{e\beta} = F_{ea\alpha}\ell^{-\beta t}$ записывается соотношениями

$$\begin{aligned} x_{e\alpha} &\approx \frac{F_{ea\alpha}}{\alpha^2+\omega_{01}^2}\left[\ell^{-\alpha t} - \frac{\alpha\ell^{-\beta t}}{\omega_{01}}(\sin\omega_{01}t + \cos\omega_{01}t)\right],\\ x_{e\beta} &\approx \frac{F_{ea\beta}}{\beta^2+\omega_{01}^2}\left\{\ell^{-\beta t}\left[1 - \left(\frac{\beta}{\omega_{01}}\sin\omega_{01}t + \cos\omega_{01}t\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Далее рассмотрим зависимость в (7) $x_{\Gamma e}(t)$ от тягового усилия $F_{\Gamma ek} = F_{ak}\ell^{-\alpha t}\cos\omega_k t$.

Выражение $x_{\Gamma ek}(t)$ в зависимости от $F_{\Gamma ek}$ было определено операционным методом на основе разложения изображения $x_{\Gamma ek}(p)$ на простые дроби и получения оригинала по таблицам [5]. В результате

$$x_{\Gamma ek}(t) = \frac{F_{ak}}{m}\left[A\ell^{-\alpha t}\left(\cos\omega_k t - \frac{\alpha}{\omega_k}\sin\omega_k t\right) + \frac{B}{\omega_0}\ell^{-\frac{b}{2m}t}\sin\omega_0 t\right],$$

где

$$A = \frac{\alpha^2+\omega_k^2-2\alpha}{\omega_0^2(\alpha^2+\omega_k^2)}; \qquad B = \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega_k^2}; \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Перемещение $x_3(t)$ якоря на спаде (заднем фронте) тягового усилия F, описываемого выражением (13), математически сходно с выражением (16). Здесь только вместо $F_{ea\beta}$ необходимо поставить $\mu_0 S(wU/(2\delta r))^2$ и вместо $\beta - 2\beta$. Все вычисленные выражения для перемещения $x(t)$ колебательной системы ЭМВ, за исключением некоторых постоянных составляющих, относятся к одной k-й гармонике. Суммарное же перемещение $x_\Sigma(t)$ будет иметь более $2n$ составляющих. Передний фронт $x_\Sigma(t)$ представляет сумму нарастающей экспоненты и затухающих с коэффициентом затухания α более $2n$ гармоник с частотами ω_k, $(\omega_k + \omega_l)/2$, $(\omega_k - \omega_l)/2$, $l \neq k$, $k = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, n}$. Заметим, что $\alpha \gg \beta = b/(2m)$. Вершина $x_\Sigma(t)$ имеет до времени $t = \tau$ постоянные составляющие, а задний фронт экспоненциально затухает при наличии также затухающих с коэффициентом затухания α гармоник, создаваемых скачкообразным напряжением $U1(t - \tau)$.

Из данного анализа следует вывод, что четкого прямоугольной формы удара ЭМВ с параметрами $\omega_k L \gg r$ воспроизвести не может. Для приближения формы $x_\Sigma(t)$ к прямоугольной необходимо управлять ЭМВ от генератора тока, т. е., чтобы $r \gg \omega_k L$. А еще лучше ввести в промежуток между якорем и полюсом магнитопровода (в воздушный зазор δ) немагнитную металлическую пластину, удар якоря о которую обеспечит прямоугольную форму удара.

1. *Божко А. Е.* Новая интерпретация переходных процессов в электроцепях // Доп. НАН України. – 2004. – № 9. – С. 83–87.
2. *Божко А. Е.* Аргументация новой концепции о переходных процесса в электроцепях с позиций волновой механики // Там само. – 2006. – № 3. – С. 83–89.
3. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
4. *Ступель Ф. А.* Электромеханические реле. – Харьков: Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1956. – 355 с.
5. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.
6. *Божко А. Е., Голуб Н. М.* Динамико-энергетические связи колебательных систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 188 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 19.02.2007