УДК 517.5

О. Б. Шаврова

Перетворення типу згортки для функцій з монотонними коефіцієнтами Фур'є в просторі L_p

(Представлено членом-кореспондентом НАН України $\boxed{\text{О. І. Степанцем}}$)

Some statements related to integral transformations of the convolution type in the spaces L_p are presented. These results complete and specify similar results considered earlier in Shapiro's, Boman–Shapiro's, and M. F. Timan's works. This concerns the periodic functions with Fourier monotonous coefficients.

У роботах [1–3] було одержано ряд результатів, які стосуються оцінок величин

$$D(f;\sigma;h;p)=\left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-uh)\,d\sigma(u)\right\|_{L_p} \tag{1}$$

у просторах L_p, де $\sigma(u)$ — довільна функція обмеженої варіації на $(-\infty;\infty)$. Автором даного повідомлення встановлюються деякі твердження, які доповнюють та уточнюють результати з вказаних робіт.

Теорема 1. *Нехай функція $f(x)\in L_p$ $(1<p<\infty)$ має ряд Фур'є*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \qquad \left(A_0(x)=\frac{a_0}{2},\ A_\nu(x)=a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x,\ \nu=1,2,\ldots\right),$$

з монотонно спадаючими коефіцієнтами Фур'є $\{a_n,b_n\}$. Тоді справедлива оцінка

$$D^p(f;\sigma;h;p)\leqslant M(\sigma,p)\left\{\sum_{\nu=0}^{m} E^p_{2^\nu-1}(f)_{L_p}\delta^p(2^\nu,h)+E^p_{2^{m+1}-1}(f)_{L_p}\right\}, \tag{2}$$

де $h=\dfrac{1}{2^{m+1}}$, $\delta(2^\nu,h)=\sum\limits_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}|\widehat{\sigma}(\mu h)-\widehat{\sigma}((\mu+1)h)|+|\widehat{\sigma}(2^\nu h)|$, $\widehat{\sigma}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}d\sigma(t)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\sigma(t)=0$, $\widehat{\sigma}(-t)=\widehat{\sigma}(t)$, *$E_n(f)_{L_p}$ — найкращі наближення функції $f(x)$ тригонометричними поліномами порядку $\leqslant n$ в метриці L_p.*

Теорема 2. *Нехай коефіцієнти Фур'є 2π-періодичної функції $f(x)\in L_p$ $(1<p<\infty)$ монотонно спадають і при $h=(1/2^{m+1})$ $\widehat{\sigma}(t)$ задовольняє умови*

$$\gamma(\mu;\nu;h)=\begin{cases}|\widehat{\sigma}(\mu h)|^{-p}\displaystyle\sum_{k=0}^{\nu-1}|\widehat{\sigma}(2^k h)|^p, & 2^{\nu-1}\leqslant\mu\leqslant 2^\nu-1 \qquad (\nu=1,2,\ldots,m+1),\\ 0, \quad \mu>2^{m+1}; & \end{cases}$$

$$\gamma(\mu;\nu;h)\leqslant C,\qquad \sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}|\gamma(\mu;\nu;h)-\gamma(\mu+1;\nu;h)|\leqslant C \qquad (\nu=1,2,\ldots,m+1).$$

Справедлива оцінка

$$\sum_{k=0}^{m} |\widehat{\sigma}(2^k h)|^p E^p_{2^k-1}(f)_{L_p} \leqslant B(\sigma,p)\{D^p(f;\sigma;h;p) + E^p_{2^{m+1}-1}(f)_{L_p}\}, \tag{3}$$

де константа $B(\sigma,p)$ не залежить від h і функції $f(x)$.

Зауважимо, що теореми 1, 2 уточнюють оцінку

$$D(f;\sigma;h;p) \leqslant A(\sigma,p)\left\{\sum_{\nu=0}^{m} E^{\gamma}_{n_\nu-1}(f)_{L_p}\delta^{\gamma}(n_\nu h) + E^{\gamma}_{n_{m+1}-1}(f)_{L_p}\right\}^{1/\gamma}, \tag{4}$$

де $\gamma = \min(2,p)$, $n_0 = 1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, $n_{k+1}/n_k \geqslant q > 1$ $(k = 1,2,\ldots)$, $n_{m+1} \leqslant 1/h$, $A(\sigma,p)$ — константа, яка залежить тільки від σ та p, $\widehat{\sigma}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}d\sigma(u)$, $\delta(n_\nu,h) = \sum\limits_{\mu=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} |\widehat{\sigma}(\mu h) - \widehat{\sigma}((\mu+1)h)| + |\widehat{\sigma}(n_\nu h)|$, яка міститься в [3], та оцінку

$$\sum_{k=0}^{m} |\widehat{\sigma}(2^k h)|^{\gamma} E^{\gamma}_{2^k-1}(f)_{L_p} \leqslant B(\sigma,p)\{D^{\gamma}(f;\sigma;h;p) + E^{\gamma}_{2^{m+1}-1}(f)_{L_p}\}, \tag{5}$$

де $\gamma = \max(2,p)$. Оцінки (4), (5) також наведені в роботі [3] для функцій з довільними коефіцієнтами Фур'є. Це уточнення стосується можливості заміни показника γ в оцінках (4) та (5) на $\gamma = p$ у випадку функцій з монотонними коефіцієнтами Фур'є.

Доведення теореми 1. Не обмежуючи загальність, проведемо доказ оцінки (2) лише для випадку, коли функція $f(x)$ парна та має ряд Фур'є виду $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. Тоді

$$D(f;\sigma;h;p) = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-th)d\sigma(t)\right\|_{L_p} = \left\|\sum_{\nu=1}^{\infty}\widehat{\sigma}(\nu h)a_\nu\cos\nu x\right\|_{L_p}. \tag{6}$$

Далі, завдяки нерівності Мінковського, маємо

$$D(f;\sigma;h;p) \leqslant \left\|\sum_{\nu=1}^{2^{m+1}-1}\widehat{\sigma}(\nu h)a_\nu\cos\nu x\right\|_{L_p} + \left\|\sum_{\nu=2^{m+1}}^{\infty}\widehat{\sigma}(\nu h)a_\nu\cos\nu x\right\|_{L_p} = S_1 + S_2.$$

Зауважимо, що, коли $p < 2$, оцінка (2) міститься в оцінці (5). Для $p > 2$, завдяки відомій нерівності Пелі (див. [4, т. 2, § 5]), яка має вигляд

$$\|f(x)\|_{L_p} \leqslant M_p\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^p n^{p-2}\right\}^{1/p}$$

(c_k — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$), одержуємо

$$S_2^p = \left\|\sum_{\nu=2^{m+1}}^{\infty}\widehat{\sigma}(\nu h)a_\nu\cos\nu x\right\|^p_{L_p} \leqslant B_p\sum_{\nu=2^{m+1}}^{\infty}|\widehat{\sigma}(\nu h)|^p a_\nu^p\nu^{p-2} \leqslant V(\sigma)B_p\sum_{\nu=2^{m+1}}^{\infty}a_\nu^p\nu^{p-2}, \tag{7}$$

де $V(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}|d\sigma(t)|$.

Для функцій $f(x) \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ з монотонно спадаючими коефіцієнтами Фур'є відомо (див. [5]), що $\sum\limits_{\nu=2^{m+1}}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \leqslant C_p E^p_{2^{m+1}}(f)_{L_p}$. Тому одержуємо

$$S_2^p \leqslant M_p V(\sigma) E^p_{2^{m+1}}(f)_{L_p}. \tag{8}$$

Для оцінки S_1 скористаємося знову нерівністю Пелі для $p > 2$

$$S_1^p = \left\| \sum_{\nu=1}^{2^{m+1}-1} \widehat{\sigma}(\nu h) a_\nu \cos \nu x \right\|^p_{L_p} \leqslant B_p \sum_{\nu=1}^{2^{m+1}-1} |\widehat{\sigma}(\nu h)|^p a_\nu^p \nu^{p-2} =$$

$$= B_p \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} |\widehat{\sigma}(\mu h)|^p a_\nu^p \nu^{p-2}.$$

Позначимо $\Delta_\nu = \sum\limits_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} a_k^p k^{p-2} |\widehat{\sigma}(kh)|^p$, $r_k = \sum\limits_{\mu=k}^{\infty} a_\mu^p \mu^{p-2}$, $\beta_k = |\widehat{\sigma}(kh)|^p$. Тепер скористаємося тотожністю

$$\Delta_\nu = \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (r_k - r_{k+1})\beta_k = r_{2^\nu}\beta_{2^\nu} + \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}-1} r_k(\beta_k - \beta_{k-1}) - r_{2^{\nu+1}}\beta_{2^{\nu+1}-1}.$$

Тоді

$$\Delta_\nu = |\sigma(2^\nu h)|^p \sum_{k=2^\nu}^{\infty} a_k^p k^{p-2} + \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}-1} \left(\sum_{\mu=k}^{\infty} a_\mu^p \mu^{p-2} \right) (|\widehat{\sigma}(\mu h)|^p - |\widehat{\sigma}((\mu-1)h)|^p) -$$

$$- \left(\sum_{\mu=2^{\nu+1}}^{\infty} a_\mu^p \mu^{p-2} \right) |\widehat{\sigma}((2^{\nu+1}-1)h)|^p.$$

Оскільки коефіцієнти Фур'є $\{a_\nu\}$ функції $f(x)$ монотонно спадають, то завдяки оцінкам А. Конюшкова (див. [5]), $r_k = \sum\limits_{\mu=k}^{\infty} a_\mu^p \mu^{p-2} \leqslant C_p E_k^p(f)_{L_p}$, маємо

$$\Delta_\nu \leqslant B_p C_p \left\{ |\widehat{\sigma}(2^\nu h)|^p E^p_{2^\nu-1}(f)_{L_p} + \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}-1} E^p_{k-1}(f)_{L_p} \big| |\widehat{\sigma}(kh)|^p - |\widehat{\sigma}((k-1)h)|^p \big| \right\}. \tag{9}$$

Використовуючи оцінку (9), одержуємо

$$S_1^p \leqslant M(\sigma, p) \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} |\widehat{\sigma}(2^\nu h)|^p E^p_{2^\nu-1}(f)_{L_p} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}-1} E^p_{k-1}(f)_{L_p} \big| |\widehat{\sigma}(kh)|^p - |\widehat{\sigma}((k-1)h)|^p \big| \right\}. \tag{10}$$

З оцінок (8) та (9) випливає твердження теореми 1.

Доведення теореми 2. Нехай $1 < p < 2$. Розглянемо величину

$$Q_m(f;\widehat{\sigma};h) = \left\{\sum_{k=0}^{m} E^p_{2^k-1}(f)_{L_p}|\widehat{\sigma}(2^k h)|^p\right\}^{1/p}.$$

Відомо, що для $1 < p < \infty$ $\|f(x) - \sum\limits_{\mu=0}^{n} A_\mu(x)\|_{L_p} \leqslant B_p E_n(f)_{L_p}$, де $A_\mu(x)$ — члени ряду Фур'є функції $f(x)$. Користуючись цим, одержуємо оцінку

$$Q^p_m(f;\widehat{\sigma};h) \leqslant B_p \sum_{k=0}^{m} |\widehat{\sigma}(2^k h)|^p \|\sum_{\mu=2^k}^{\infty} A_\mu(x)\|^p_{L_p} = B_p \sum_{k=0}^{m} |\widehat{\sigma}(2^k h)|^p \|\sum_{\nu=k}^{\infty} \Delta_\nu(f;x)\|^p_{L_p},$$

де $\Delta_\nu(f;x) = \sum\limits_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} A_\mu(x)$.

Використовуючи теорему Літтльвуда і Пелі (див. [4, т. 2, с. 348]), одержуємо

$$\left\|\sum_{\nu=k}^{\infty} \Delta_\nu(f;x)\right\|^p_{L_p} \leqslant B_p \int\limits_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=k}^{\infty} |\Delta_\mu(f;x)|^2\right)^{p/2} dx.$$

Враховуючи, що $1 < p < 2$, маємо оцінку

$$Q^p_m(f;\widehat{\sigma};h) \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m} |\widehat{\sigma}(2^k h)|^p \sum_{\nu=k}^{\infty} |\Delta_\nu(f;x)|^p dx.$$

Далі, величину $Q^p_m(f;\widehat{\sigma};h)$ зобразимо у вигляді двох доданків:

$$R_1 = \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m} |\widehat{\sigma}(2^k h)|^p \sum_{\nu=k}^{m} |\Delta_\nu(f;x)|^p dx, \qquad R_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m} |\widehat{\sigma}(2^k h)|^p \sum_{\nu=m+1}^{\infty} |\Delta_\nu(f;x)|^p dx.$$

Переставляючи порядок підсумовування, знаходимо, що

$$R_1 = \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m} |\widehat{\sigma}(2^k h)|^p \sum_{\nu=k}^{m} |\Delta_\nu(f;x)|^p dx = \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m} |\Delta_k(f;x)|^p \sum_{\mu=0}^{k} |\widehat{\sigma}(2^\mu h)|^p dx.$$

Використовуючи умови теореми для функції $\widehat{\sigma}(t)$ та теорему Марцинкевича (див. [4, т. 2, с. 346]) про мультиплікатори, одержуємо оцінку

$$R_1 \leqslant M_p \int\limits_0^{2\pi} \left|\sum_{\mu=1}^{2^{m+1}-1} \widehat{\sigma}(\mu h) A_\mu(x)\right|^p dx.$$

Завдяки тому, що частинні суми рядів Фур'є в просторах L_p, коли $1 < p < \infty$, за порядком не більше норми функції, знаходимо, що

$$R_1 \leqslant M_p \|F_\sigma(f;x;h)\|^p_{L_p} = M_p D^p(f;\sigma;h;p).$$

Оцінюючи доданок R_2, маємо

$$R_2 = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m} |\widehat{\sigma}(2^k h)|^p \sum_{\nu=m+1}^{\infty} |\Delta_\nu(f;x)|^p dx \leqslant E^p_{2^{m+1}-1}(f)_{L_p} \sum_{k=0}^{m} |\widehat{\sigma}(2^k h)|^p \leqslant$$

$$\leqslant E^p_{2^{m+1}-1}(f)_{L_p} |\widehat{\sigma}(mh)|^p \leqslant V(\widehat{\sigma})^p E^p_{2^{m+1}-1}(f)_{L_p}.$$

На підставі оцінок величин R_1 та R_2 одержуємо твердження теореми.

Зауважимо, що коли $p > 2$, то для будь-якої системи чисел $\{c_n\}$ відома нерівність $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^p\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2\right\}^{1/2}$, а для $1 < p < 2$ $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^p\right\}^{1/p}$. З цього випливає, що оцінка (2) за порядком краща, ніж (5), а оцінка (3) за порядком краща, ніж оцінка

$$\sum_{k=0}^{m} |\widehat{\sigma}(2^k h)|^\gamma E^\gamma_{2^k-1}(f)_{L_p} \leqslant B(\sigma,p)\{D^\gamma(f;\sigma;h;p) + E^\gamma_{2^{m+1}-1}(f)_{L_p}\},$$

де $\gamma = \max(2,p)$, яка наведена в роботі (див. [3]).

1. *Shapiro H. S.* A tauberian theorem related to approximation theory // Acta Math. – 1968. – **120**, No 3–4. – P. 279–292.
2. *Shapiro H. S., Boman J.* Comparison theorems for a generalized modules of continuity // Bull. Amer. Math. Soc. – 1969. – **75**, No 6. – P. 1266–1268.
3. *Тиман М. Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. – Днепропетровск: Полиграфист, 2000. – 320 с.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – Москва: Мир, 1965. – Т. 2.
5. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. – 1958. – **44**, 86: 11. – С. 53–84.

Дніпропетровський державний аграрний університет
Надійшло до редакції 08.06.2007