УДК 517.9

Т. В. Шовкопляс

Нетерова імпульсна крайова задача та умови існування її розв'язку

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. О. Перестюком)

A weakly nonlinear Noether impulse boundary-value problem for a system of differential equations of the second order is considered. Necessary and sufficient conditions of existence of at least one of its solutions are found. A method to solve this problem is given.

На відрізку $[a,b]$, де t_i, $i=1,2,\ldots,p$, — точки імпульсної дії, розглядається нетерова імпульсна крайова задача

$$(P(t)x'(t))' - Q(t)x(t) = f(t) + \varepsilon X(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \qquad t \in A_0, \tag{1}$$

$$\Delta P(t)x'(t)\big|_{t=t_i} = \gamma_i + \varepsilon J_i(x(t_i-0,\varepsilon),\varepsilon), \qquad i=1,2,\ldots,p, \tag{2}$$

$$lx(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \qquad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Тут A_0 — множина вигляду $A_0 := [a,b]\backslash\{t_i\}_{i=1}^{p}$; $x(t)$ — n-вимірна, двічі неперервно диференційовна на відрізку $[a,b]$ з розривами першого роду в точках імпульсної дії t_i, $i=1,2,\ldots,p$, вектор-функція: $x(t)\in C^2(A_0)$; $P(t)$, $Q(t)$ — $(n\times n)$-вимірні дійсні матриці-функції, елементи матриці $P(t)$ неперервно диференційовні з розривами першого роду в точках імпульсної дії: $P(t)\in C^1(A_0)$, $\det P(t)\neq 0$, $t\in[a,b]$, елементи матриці $Q(t)$ неперервні на A_0: $Q(t)\in C(A_0)$; $f(t)$ — n-вимірна вектор-функція, неперервна на множині A_0: $f(t)\in C(A_0)$; величина $\Delta P(t)x'(t)\big|_{t=t_i}$, $i=1,2,\ldots,p$, визначена таким чином [1, 2]: $\Delta P(t)x'(t)\big|_{t=t_i} := = P(t_i+0)x(t_i+0) - P(t_i-0)x(t_i-0)$, $i=1,2,\ldots,p$; γ_i, $i=1,2,\ldots,p$, — n-вимірні дійсні вектори: $\gamma_i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,2,\ldots,p$; l — лінійний обмежений m-вимірний векторний функціонал, визначений на просторі $C(A_0)$ неперервних n-вимірних векторних функцій: $l\colon C(A_0)\to\mathbb{R}^m$; α — m-вимірний вектор, елементами якого є дійсні числа: $\alpha\in\mathbb{R}^m$; ε — малий невід'ємний параметр.

Розв'язок $x(t)$ нетерової імпульсної крайової задачі шукається в класі n-вимірних неперервних вектор-функцій: $x'(t)$, $x''(t)\in C(A_0)$.

Вважається, що функції $P(t)$, $P'(t)$, $Q(t)$, $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$, $f(t)$ є неперервними зліва в точках імпульсної дії.

Також розглядається відповідна до імпульсної крайової задачі (1)–(3) породжуюча ($\varepsilon = = 0$) імпульсна крайова задача

$$(P(t)x'(t))' - Q(t)x(t) = f(t), \qquad t\in A_0, \tag{4}$$

$$\Delta P(t)x'(t)\big|_{t=t_i} = \gamma_i, \qquad i=1,2,\ldots,p, \tag{5}$$

$$lx(\cdot) = \alpha, \qquad \alpha\in\mathbb{R}^m. \tag{6}$$

Нелінійна за змінною x n-вимірна вектор-функція $X(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ є неперервно диференційовною в околі породжуючого розв'язку x_0 породжуючої крайової задачі (4)–(6): $X(\cdot,t,\varepsilon)\in \in C^1(\|x-x_0\|\leqslant\delta)$; за змінною t належить класу $C(A_0)$: $X(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\in C(A_0)$ і в околі розв'язків породжуючої крайової задачі (4)–(6) є неперервною за $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$: $X(x, t, \cdot) \in \in C([0, \varepsilon_0])$.

Векторний функціонал $J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ є неперервно диференційовний за змінною x (у розумінні Фреше): $J(\cdot, \varepsilon) \in C^1(\|x - x_0\| \leqslant \gamma)$ та неперервний за $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ в околі розв'язків породжуючої задачі (4)–(6): $J(x, \cdot) \in C([0, \varepsilon_0])$.

$X(t)$ — $(n \times 2n)$-вимірна фундаментальна матриця однорідної ($f(t) = 0$, $\gamma_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$) лінійної імпульсної системи (4), (5): $X(t) := [X_1(t)X_2(t)]$, де $X_k(t)$, $k = 1, 2$, — $(n \times n)$-вимірні матриці, вектор-стовпчики яких є лінійно незалежними розв'язками однорідної ($f(t) = 0$, $\gamma_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$) імпульсної системи (4), (5); $D := lX(\cdot)$ — $(m \times 2n)$-вимірна матриця, утворена в результаті дії функціонала l на фундаментальну матрицю $X(t)$; P_D — $(2n \times 2n)$-вимірна матриця-ортопроектор, що проектує простір $\mathbb{R}^{2n}$ на нуль-простір $N(D) = P_D\mathbb{R}^{2n}$ матриці D; P_{D^*} — $(m \times m)$-вимірна матриця-ортопроектор, що проектує простір $\mathbb{R}^m$ на нуль-простір $N(D^*) = P_D\mathbb{R}^m$ матриці D^*; матриця D^* є транспонованою до матриці D.

Для породжуючої імпульсної крайової задачі (4)–(6) [1, 3, 4] має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай виконується умова $rankD = n_1 < \min(2n, m)$. Тоді однорідна ($f(t) = 0$, $\gamma_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $\alpha = 0$) імпульсна крайова задача (4)–(6) має r ($r = 2n - n_1$) і лише r лінійно незалежних розв'язків. Неоднорідна імпульсна крайова задача (4)–(6) розв'язна тоді і лише тоді, коли вектор-функція $f(t) \in C(A_0)$, вектори γ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, та $\alpha \in \mathbb{R}^m$ задовольняють умову розв'язності*

$$P_{D_d^*}\left\{\alpha - l\int_a^b K(t,s)P^{-1}(s)f(s)ds - l\sum_{i=1}^{p} K(t, t_i + 0)\gamma_i\right\} = 0, \qquad d = m - n_1.$$

Крайова задача (4)–(6) має r-параметричну сім'ю лінійно-незалежних розв'язків виду

$$x(t, c_r) = X_r(t)c_r + (G[f, \gamma_i])(t) + X(t)D^+\alpha, \qquad i = 1, 2, \ldots, p, \qquad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $P_{D_d^*}$ — $(d \times m)$-вимірна матриця, яка складається з повної системи d лінійно незалежних рядків $(m \times m)$-вимірної матриці $P_{D^*}\colon \mathbb{R}^m \to N(D^*)$, $N(D^*) = \mathrm{Ker}(D^*)$, $N(D^*) = P_{D^*}\mathbb{R}^m$; $X_r(t)$ – $(n \times r)$-вимірна матриця, стовпчики якої утворюють повну систему r-лінійно незалежних розв'язків однорідної імпульсної системи другого порядку (4), (5): $X_r(t) = X(t)P_{D_r}$, P_{D_r} — $(n \times r)$-вимірна матриця, яка складається з r-лінійно незалежних стовпчиків $(2n \times 2n)$-вимірної матриці $P_D\colon \mathbb{R}^{2n} \to N(D)$, $N(D) = \mathrm{Ker}(D)$, $N(D) = P_D\mathbb{R}^{2n}$; D^+ — $(2n \times m)$-вимірна матриця, псевдообернена до матриці D; c_r — довільний вектор-стовпчик з простору $\mathbb{R}^r$; $(G[f, \gamma_i])(t)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $t \in [a, b]$, — узагальнений оператор Гріна, який діє на вектор-функцію $f(t) \in C(A_0)$ та вектори γ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, таким чином:

$$(G[f, \gamma_i])(t) \overset{def}{=} \left[\int_a^b K(t,s)P^{-1}(s)f(s)ds - X(t)D^+ l\int_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)f(s)ds,\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{p} K(t, t_i + 0)\gamma_i - X(t)D^+ l\sum_{i=1}^{p} K(\cdot, t_i + 0)\gamma_i\right], \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Тепер розглянемо вихідну крайову задачу (1)–(3). Знайдено необхідну умову розв'язності цієї задачі.

Теорема 2. *Нехай імпульсна крайова задача* (1)–(3) *має розв'язок* $x(t,\varepsilon)$, *який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється в породжуючий розв'язок*

$$x(t,c_r) = X_r(t)c_r + (G[f,\gamma_i])(t) + X(t)D^+\alpha, \qquad i = 1,2,\ldots,p,$$

з векторною сталою $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$. *Тоді векторна стала* c_r^0 *є дійсним коренем рівняння*

$$F(c_r^0) \equiv P_{D_d^*}\Bigg\{J(x_0(\cdot,c_r^0),0) - l\int\limits_a^b K(\cdot,s)X(x_0(s,c_r^0),s,0)ds -$$
$$- l\sum_{i=1}^p K(t,t_i+0)J_i(x(t_i-0,c_r^0),0)\Bigg\}, \qquad i = 1,2,\ldots,p, \qquad d = m - n_1. \tag{7}$$

Доведення цієї теореми аналогічно доведенню з [1, 4]. Знайдемо достатню умову розв'язності.

Розв'язок $x(t,\varepsilon)$ імпульсної крайової задачі (1)–(3) запишемо у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0) + z(t,\varepsilon), \qquad c_r^0 \in \mathbb{R}^r. \tag{8}$$

У (8) вектор-функція $x_0(t,c_r^0)$ є розв'язком породжуючої імпульсної крайової задачі (4)–(6) з векторною сталою $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, яка задовольняє [1] рівняння (7), $z(t,\varepsilon)$ — деяка n-вимірна вектор-функція. Оскільки вектор-функція $x_0(t,c_r^0)$ є розв'язком породжуючої імпульсної крайової задачі (4)–(6), то, підставивши рівність (8) у задачу (1)–(3), від імпульсної крайової задачі (1)–(3) перейдемо до задачі

$$\begin{aligned}
&(P(t)z'(t,\varepsilon))' - Q(t)z(t,\varepsilon) = \varepsilon X(x_0(t,c_r^0) + z(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \qquad t \in A_0,\\
&\Delta P(t)x'(t)\big|_{t=t_i} = \gamma_i + \varepsilon J_i(x(t_i-0,\varepsilon),\varepsilon), \qquad i = 1,2,\ldots,p,\\
&lx(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \qquad \alpha \in \mathbb{R}^m.
\end{aligned} \tag{9}$$

Нелінійності $X(x_0(t,c_r^0) + z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$, $J_i(x_0(t_i-0,c_r^0) + z(t_i-0,\varepsilon),\varepsilon)$, $i = 1,2,\ldots,p$, та $J(x_0(\cdot,c_r^0) + z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ в імпульсній крайовій задачі (9) в околі точки $z = 0$, $\varepsilon = 0$ мають такий розклад у ряд:

$$\begin{aligned}
&X(x_0(t,c_r^0) + z,t,\varepsilon) = X(x_0(t,c_r^0),t,0) + A_1(t)z + R(z,t,\varepsilon),\\
&A_1(t) = \frac{\partial X(x,t,0)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0(t,c_r^0)}, \qquad R(0,t,0) = 0, \qquad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial z} = 0,\\
&J(x_0(\cdot,c_r^0) + z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = J(x_0(\cdot,c_r^0),0) + l_1z(\cdot,\varepsilon) + R_0(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),\\
&R_0(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial R_0(0,0)}{\partial z} = 0,\\
&J_i(x_0 + z,\varepsilon) = J_i(x_0(t_i,c_r^0),0) + A_{1i}z(t_i-0,\varepsilon) + R_i(z(t_i-0,\varepsilon),\varepsilon), \quad i = 1,2,\ldots,p,
\end{aligned} \tag{10}$$

$l_1z(\cdot,\varepsilon)$-лінійна частина векторного функціонала $J(x_0(\cdot,c_r^0) + z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$.

Для нелінійної імпульсної крайової задачі (1)–(3) справедлива достатня умова існування її розв'язків.

Має місце теорема.

Теорема 3. *Нехай для нелінійної імпульсної крайової задачі* (1)–(3) *виконується критичний випадок, тобто* $\operatorname{rank} D = n_1 < \min(2n, m)$, *та імпульсна крайова задача* (4)–(6) *має* r*-параметричну сім'ю породжуючих розв'язків*

$$x_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + (G[f, \gamma_i])(t) + X(t)D^+\alpha, \qquad t \in [a, b], \qquad \forall c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тоді для кожного значення вектора $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, *що задовольняє рівняння* (7), *при виконанні умови*

$$\operatorname{rank}\left[B_0 := P_{D_d^*}\left\{l_1 X_r(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot, s)A_1(s)X_r(s)ds - \sum_{i=1}^{p} K(\cdot, t_i + 0)A_{1i}X_r(t_i - 0)\right\}\right] = d$$

нелінійна імпульсна крайова задача (1)–(3) *має хоча б один розв'язок* $x(t, \varepsilon)$: $x(\cdot, \varepsilon) \in C^2(A_0)$, $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, *який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється в породжуючий розв'язок* $x_0(t, c_r^0) = X_r(t)c_r^0 + (G[f, \gamma_i])(t) + X(t)D^+\alpha$, $t \in [a, b]$, *з векторною сталою* $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, *що задовольняє рівняння* (7), *та визначається за допомогою рівномірно збіжного на* $[0, \varepsilon_0]$ *ітераційного процесу*

$$c_k = -B_0^+ P_{D_d^*}\left\{l_1 z_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(z_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot, s)[A_1(s)z_k^{(1)}(s, \varepsilon) + \right.$$

$$\left. + R(z_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon)]ds - \sum_{i=1}^{p} K(t, t_i + 0)[A_{1i}z_k^{(1)}(t_i - 0, \varepsilon) + R_i(z_k(t_i - 0, \varepsilon), \varepsilon)]\right\},$$

$$z_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) =$$

$$= \varepsilon\left(G\begin{bmatrix} X(x_0(s, c_r^0), s, 0) + A_1(s)(X_r(s)c_k + z_k^{(1)}(s, \varepsilon)) + R(z_k^{(1)}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \\ J_i(x_0(t_i, c_r^0), 0) + A_{1i}[X_r(t_i - 0)c_k + z_k^{(1)}(t_i - 0, \varepsilon)] + R_i(z_k^{(1)}(t_i - 0, \varepsilon)) \end{bmatrix}\right)(t) + \qquad (11)$$

$$+ \varepsilon X(t)D^+(J(x_0(\cdot, c_k^0), 0) + l_1(X_r(\cdot)c_k + z_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon)) + R_0(z_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)),$$

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)c_k + z_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = x_0(t, c_k^0) + z_{k+1}(t, \varepsilon),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad z_0(t, \varepsilon) = z_0^{(1)}(t, \varepsilon) = 0.$$

Доведення даної теореми аналогічно доведенню відповідної теореми у випадку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку [1, с. 264–275].

Доведення збіжності ітераційного процесу (11) та встановлення його оцінок проводиться шляхом застосування методу мажорант Ляпунова, запропонованого в [5–7].

З теореми 2 у випадку нелінійної крайової задачі (1)–(3) без імпульсної дії ($\gamma_i = 0$, $J_i(x(t_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$) випливає раніше відомий результат [6].

Більш загальний випадок розв'язності нетерової крайової задачі у випадку системи диференціальних рівнянь першого порядку розглянуто в [1, 4].

1. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
3. *Шовкопляс Т. В.* Критерій розв'язності лінійної імпульсної задачі для системи другого порядку // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 6. – С. 861–864.
4. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
5. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – Москва: Наука, 1979. – 432 с.
6. *Лангерова М., Шовкопляс Т.* Умови існування розв'язку нетерової крайової задачі для системи другого порядку // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 3. – С. 368–375.
7. *Langerova M.* Boundary value problem for weakly perturbed linear differential equation of the second order // 5th Intern. conf. APLIMAT – 2006. – Bratislava: Slovak Univ. Technol., 2006. – P. 273–278.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 21.05.2007