УДК 519.6

В. В. Стоян

Про середньоквадратичне обернення однієї диференціальної моделі нелінійного просторово-часового процесу з дискретно визначеними збурюючими факторами

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Скопецьким)

A dynamic process, whose function of state is a product of its linear transformations, is examined. An integral representation of the root-mean-square inversion approximation of such a function is built for the case of discretely defined perturbing factors. Exactness of the approximation obtained is estimated.

Методи лінійної алгебри, грунтовно вивчені в [1, 2] та успішно розвинуті в [3, 4], дозволили [5] побудувати середньоквадратичні наближення до розв'язків лінійних інтегральних та функціональних рівнянь, які були використані [6] для математичного моделювання динаміки лінійних систем з розподіленими параметрами. В [7] започатковано методику псевдоінверсного дослідження нелінійних алгебраїчних систем, яка дозволила для певного класу нелінійностей використати класичні результати лінійної алгебри. Нижче одержані в [7] математичні результати поширюються на системи, динаміка яких в необмеженій просторово-часовій області описується рівнянням з нелінійним диференціальним оператором, утвореним добутком кількох лінійних. Буде побудовано та досліджено на точність та однозначність середньоквадратичне наближення до дискретно та неперервно визначеного стану таких систем при точково зосереджених зовнішньо-динамічних збуреннях, які діють на них.

1. Розглянемо динаміку системи, функція $y(x,t)$ стану якої в необмеженій просторово-часовій області $S = \{s = (x,t)\colon x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1\}$ визначається рівнянням

$$[L_1(\partial_s)y(s)][L_2(\partial_s)y(s)] = u(s), \tag{1}$$

де $u(s)$ — функція зовнішньо-динамічних збурень, які діють на систему, $\partial_s = (\partial_x, \partial_t)$, а $\partial_x = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_n})$ — вектор похідних за просторовими координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$; ∂_t — похідна за часом t; $L_1(\cdot)$, $L_2(\cdot)$ — поліноміальні функції своїх аргументів.

Розв'яжемо задачу побудови функції $y(s)$ такої, щоб при заданій дискретними значеннями $u(s'_1)$, $u(s'_2), \ldots, u(s'_M)$ функції зовнішньо-динамічних збурень $u(s)$ мінімізувалося значення

$$\Phi = \sum_{j=1}^{M} \big[[L_1(\partial_s)y(s)]\big|_{s=s'_j}[L_2(\partial_s)y(s)]\big|_{s=s'_j} - u(s'_j)\big]^2. \tag{2}$$

При цьому зупинимося на випадках, коли шукана згідно з (2) функція $y(s)$ визначається аналітично або набором значень $y(s_l) = y_l$ $(l = \overline{1,L})$.

В обох випадках будемо виходити з отриманих в [6, 8] наукових результатів з дослідження лінійних динамічних систем з розподіленими параметрами. Для цього систему (1) запишемо у вигляді

$$u_1(s)u_2(s) = u(s), \tag{3}$$

де

$$u_k(s) = L_k(\partial_s)y(s) \qquad (k = \overline{1,2}), \tag{4}$$

або (що еквівалентно)

$$y(s) = \int\limits_S G_k(s - s')u_k(s')\,ds', \tag{5}$$

де [8]

$$G_k(s - s') = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int\limits_S \frac{1}{L_k(i\lambda, i\mu)} e^{i\Lambda + i\mu} d\lambda d\mu.$$

Тут i — уявна одиниця, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ — функція Гріна рівняння (4) в необмеженій просторово-часовій області S.

2. Розглянемо варіант побудови вектора

$$\vec{y} = (y_l,\ l = \overline{1,L})^T \tag{6}$$

такого, щоб

$$\Phi \to \min_{\vec{y}}. \tag{7}$$

Дискретизуючи точками s_l $(l = \overline{1,L})$, s'_m $(m = \overline{1,M})$ функції $G_k(s - s')$ $(k = \overline{1,2})$ за нештрихованими та штрихованими координатами, співвідношення (5) запишемо у вигляді

$$\vec{y} = A_1\vec{u}_1 = A_2\vec{u}_2, \tag{8}$$

де

$$A_k = [G_k(s_l - s'_m)\Delta s'_m]_{l,m=1}^{l=L;m=M}, \tag{9}$$

($\Delta s'_m$ — крок дискретизації області S точками s'_m)

$$\vec{u}_k = (u_k(s'_1), u_k(s'_2), \ldots, u_k(s'_M))^T \qquad (k = \overline{1,2}).$$

Звідси

$$\vec{u}_1 = \arg\min_{\vec{u}\in\Omega_1} \|\vec{u}\|^2,$$

$$\vec{u}_2 = \arg\min_{\vec{u}\in\Omega_2} \|\vec{u}\|^2,$$

де

$$\Omega_k = \{\vec{u}\colon \|A_k\vec{u} - \vec{y}\|^2 \to \min_{\vec{u}}\} \qquad (k = \overline{1,2}),$$

визначимо співвідношеннями

$$\vec{u}_1 = A_1^+\vec{y} = A_1^+A_2\vec{u}_2, \qquad \vec{u}_2 = A_2^+\vec{y} = A_2^+A_1\vec{u}_1$$

(тут та далі знаком "+" позначена операція псевдообернення матриці).

Позначивши символом $\otimes$ операцію декартового добутку двох векторів, рівняння (3), яким пов'язані не визначені поки що вектори $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$, подамо у вигляді

$$\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 = \vec{u},$$

або (що еквівалентно)

$$\vec{u}_1 \otimes A_2^+A_1\vec{u}_1 = \vec{u}, \tag{10}$$

$$\vec{u}_2 \otimes A_1^+A_2\vec{u}_2 = \vec{u}, \tag{11}$$

де

$$\vec{u} = (u(s_1'), u(s_2'), \ldots, u(s_M'))^T \Delta s_m'. \tag{12}$$

Останнє означає, що шуканий вищеозначений вектор $\vec{y}$ буде знайдений зі співвідношення (8), в якому

$$\vec{u}_1 = \arg\min_{\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^M} \|\vec{v}_1 \otimes A_2^+A_1\vec{v}_1 - \vec{u}\|^2, \tag{13}$$

$$\vec{u}_2 = \arg\min_{\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^M} \|\vec{v}_2 \otimes A_1^+A_2\vec{v}_2 - \vec{u}\|^2. \tag{14}$$

Для розв'язання задач (13), (14) використаємо результати, отримані в [7]. Якщо позначити через $\overline{A}_{1i}$, $\overline{A}_{2i}$ матриці

$$\overline{A}_1 = \mathrm{col}((\underbrace{0,\ldots,0}_{M(i-1)}, \mathrm{str}([A_2^+A_1]_{ij},\ j=\overline{1,M}), \underbrace{0,\ldots,0}_{M^2-iM}),\ i=\overline{1,M}), \tag{15}$$

$$\overline{A}_2 = \mathrm{col}((\underbrace{0,\ldots,0}_{M(i-1)}, \mathrm{str}([A_1^+A_2]_{ij},\ j=\overline{1,M}), \underbrace{0,\ldots,0}_{M^2-iM}),\ i=\overline{1,M}) \tag{16}$$

без $(M(i-1)+i)$-х стовпців, а через $\overline{a}_{1i}$, $\overline{a}_{2i}$ — ці стовпці, то значення $u_1(s_i')$, $u_2(s_i')$ $(i=\overline{1,M})$, які фігурують у визначенні векторів (13) та (14), визначатимуться співвідношеннями

$$u_k(s_i') = \sqrt{q_{ki}^T\vec{u}} \qquad (i=\overline{1,M},\ k=\overline{1,2}), \tag{17}$$

де q_{ki}^T — вектор-рядок, який задовольняє співвідношення [1, 3]

$$(\overline{A}_{ki} \vdots \overline{a}_{ki})^+ = \begin{pmatrix} Q_{ki} \\ q_{ki}^T \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Точність, з якою знайдені вище вектори $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ значень функцій $u_1(s)$ та $u_2(s)$ задовольняють рівняння (8), (10), (11), визначатиметься величинами

$$\varepsilon_k^2 = \min_{\vec{u}_k} \|A_k\vec{u}_k - \vec{y}\|^2 = \vec{y}^T\vec{y} - \vec{y}^T A_k A_k^+ \vec{y} \qquad (k = \overline{1,2}), \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \delta_1^2 &= \min_{\vec{u}_1} \|\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 - \vec{u}\|^2 = \min_{\vec{u}_1} \|\vec{u}_1 \otimes A_2^+ A_1 \vec{u}_1 - \vec{u}\|^2 = \min_{\alpha_1} \|\overline{A}_1 \alpha_1 - \vec{u}\|^2 = \\ &= \vec{u}^T\vec{u} - \vec{u}^T \overline{A}_1 \overline{A}_1^+ \vec{u}, \\ \delta_2^2 &= \min_{\vec{u}_2} \|\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 - \vec{u}\|^2 = \min_{\vec{u}_2} \|\vec{u}_2 \otimes A_1^+ A_2 \vec{u}_2 - \vec{u}\|^2 = \min_{\alpha_2} \|\overline{A}_2 \alpha_2 - \vec{u}\|^2 = \\ &= \vec{u}^T\vec{u} - \vec{u}^T \overline{A}_2 \overline{A}_2^+ \vec{u} \end{aligned} \tag{20}$$

відповідно. При цьому

$$\alpha_1 = \operatorname{col}((u_1(s'_i)u_1(s'_j),\ j = \overline{1,M}),\ i = \overline{1,M}),$$

$$\alpha_2 = \operatorname{col}((u_2(s'_i)u_2(s'_j),\ j = \overline{1,M}),\ i = \overline{1,M}).$$

Тому розв'язком розглядуваної задачі буде вектор

$$\vec{y} = A_1\vec{u}_1,$$

якщо $\varepsilon_1^2 + \delta_1^2 < \varepsilon_2^2 + \delta_2^2$, або

$$\vec{y} = A_2\vec{u}_2,$$

якщо $\varepsilon_2^2 + \delta_2^2 < \varepsilon_1^2 + \delta_1^2$.

Зауважимо також, що точність отриманого таким чином розв'язку задачі залежатиме від вибору точок s'_m $(m = \overline{1,M})$, якими визначається точність заміни інтегральної форми зображення розв'язку (5) її дискретним аналогом (8).

3. Розглянемо задачу побудови функції $y(s)$ такої, щоб

$$\Phi \to \min_{y(s)}. \tag{21}$$

Як і при розв'язанні попередньої задачі, будемо виходити з зображень (3), (5) рівняння (1). Після дискретизації функції $u(s)$ останнього визначеними вище точками s'_m $(m = \overline{1,M})$, для $k = \overline{1,2}$, отримаємо

$$y(s) = \overline{G}_k(s)\vec{u}_k, \tag{22}$$

де

$$\vec{u}_k = \big(u_k(s'_1)\sqrt{\Delta s'_1}, u_k(s'_2)\sqrt{\Delta s'_2}, \ldots, u_k(s'_M)\sqrt{\Delta s'_M}\big)^T,$$

$$\overline{G}_k(s) = \operatorname{str}\big(G_k(s - s'_m)\sqrt{\Delta s'_m},\ m = \overline{1,M}\big),$$

звідки

$$\vec{u}_k = \arg\min_{\vec{u}'_k} \int\limits_S (\overline{G}_k(s)\vec{u}'_k - y(s))^2 ds = P_k^+ \vec{G}_{yk} + v_k - P_k^+ P_k v_k \qquad \forall v_k \in \mathbb{R}^M \tag{23}$$

при

$$\vec{G}_{yk} = \int\limits_S \overline{G}_k^T(s) y(s)\, ds, \qquad P_k = \int\limits_S \overline{G}_k^T(s)\overline{G}_k(s)\, ds.$$

При цьому

$$\varepsilon_k^2 = \min_{u_k(s)} \int\limits_S \left(y(s) - \sum_{m=1}^{M} G_k(s - s'_m) u_k(s'_m)\Delta s'_m \right)^2 ds = \min_{\vec{u}_k} \int\limits_S (y(s) - \overline{G}_k(s)\vec{u}_k)^2 ds =$$

$$= \int\limits_S y^2(s)\, ds - \vec{G}_{yk}^T P_k^+ \vec{G}_{yk}. \qquad (24)$$

Покладаючи $v_k = 0$, яке тотожно дорівнює нулю при

$$\lim_{N\to\infty} \det[\overline{G}_k^T(s_l)\overline{G}_k(s_m)]_{l,m=1}^{l.m=N} > 0,$$

із (22), (23) знаходимо

$$\vec{u}_1 = P_1^+ P_{12}\vec{u}_2, \qquad \vec{u}_2 = P_2^+ P_{21}\vec{u}_1,$$

де $P_{ij} = \int\limits_S \overline{G}_i^T(s)\overline{G}_j(s)\, ds$. А це означає, що розв'язок розглядуваної задачі визначатиметься співвідношенням (22), у якому

$$\vec{u}_1 \otimes P_2^+ P_{21}\vec{u}_1 = \vec{u}, \qquad (25)$$

$$\vec{u}_2 \otimes P_1^+ P_{12}\vec{u}_2 = \vec{u}. \qquad (26)$$

Середньоквадратично обертаючи [7] (25), (26), робимо висновок, що значення $u_1(s'_i)$, $u_2(s'_i)$ $(i = \overline{1,M})$, які фігурують у визначенні векторів $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$, отримаємо з (17), якщо замість визначення (15), (16) матриць $\overline{A}_1$ та $\overline{A}_2$ взяти такі:

$$\overline{A}_1 = \mathrm{col}((\underbrace{0,\ldots,0}_{M(i-1)}, \mathrm{str}([P_2^+ P_{21}]_{ij},\ j = \overline{1,M}), \underbrace{0,\ldots,0}_{M^2 - iM}),\ i = \overline{1,M}), \qquad (27)$$

$$\overline{A}_2 = \mathrm{col}((\underbrace{0,\ldots,0}_{M(i-1)}, \mathrm{str}([P_1^+ P_{12}]_{ij},\ j = \overline{1,M}), \underbrace{0,\ldots,0}_{M^2 - iM}),\ i = \overline{1,M}). \qquad (28)$$

Точність, з якою знайдені таким чином вектори $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$ задовольнятимуть співвідношення (25), (26), за аналогією з (20), визначатиметься величинами

$$\delta_k^2 = \min_{\vec{u}_k} \|\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 - \vec{u}\|^2 = \vec{u}^T\vec{u} - \vec{u}^T\overline{A}_k\overline{A}_k^+\vec{u} \qquad (k = \overline{1,2}).$$

А це означає, що індекс k в зображенні (22) розв'язку розглядуваної задачі виберемо так, щоб

$$k = \arg\min_{i=\overline{1,2}} (\varepsilon_i^2 + \delta_i^2).$$

4. Розглянемо узагальнення методики розв'язання задач (2), (7) та (2), (21) на випадок, коли динаміка досліджуваної системи описується рівнянням

$$[L_1(\partial_s)y(s)][L_2(\partial_s)y(s)]\cdots[L_n(\partial_s)y(s)] = u(s). \tag{29}$$

В цьому випадку

$$\Phi = \sum_{j=1}^{M}\Big[[L_1(\partial_s)y(s)]\Big|_{s=s'_j}[L_2(\partial_s)y(s)]\Big|_{s=s'_j}\cdots[L_n(\partial_s)y(s)]\Big|_{s=s'_j} - u(s'_j)\Big]^2. \tag{30}$$

Для розв'язання задачі (30), (7) систему (29) подамо у вигляді

$$u_1(s)u_2(s)\cdots u_n(s) = u(s), \tag{31}$$

де

$$u_k(s) = L_k(\partial_s)y(s) \qquad (k = \overline{1,n}), \tag{32}$$

або, що еквівалентне,

$$y(s) = \int\limits_S G_k(s-s')u_k(s')\,ds' \qquad (k = \overline{1,n}). \tag{33}$$

Після дискретизації (31) та (33) визначеними вище точками s_l $(l = \overline{1,L})$, s'_m $(m = \overline{1,M})$, отримаємо

$$\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 \otimes \cdots \otimes \vec{u}_n = \vec{u}, \tag{34}$$

$$\vec{y} = A_1\vec{u}_1 = A_2\vec{u}_2 = \cdots = A_n\vec{u}_n, \tag{35}$$

де $\vec{y}$ та $\vec{u}$ визначені в (6), (12), $\vec{u}_k = (u_k(s'_1), u_k(s'_2), \ldots, u_k(s'_M))^T\sqrt[n]{\Delta s'_m}$ $(k = \overline{1,n})$, $A_k = \left[G_k(s_l - s'_m)\sqrt[n]{(\Delta s'_m)^{n-1}}\right]_{l.m=1}^{l=L,m=M}$. Звідси для $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ маємо

$$\begin{aligned}&\vec{u}_1 = A_1^+A_k\vec{u}_k, \ldots, \vec{u}_{k-1} = A_{k-1}^+A_k\vec{u}_k,\\ &\vec{u}_{k+1} = A_{k+1}^+A_k\vec{u}_k, \ldots, \vec{u}_n = A_n^+A_k\vec{u}_k.\end{aligned} \tag{36}$$

З урахуванням (36) співвідношення (34) перепишемо у вигляді

$$[A_1^+A_k\vec{u}_k]_i\cdots[A_{k-1}^+A_k\vec{u}_k]_i u_k(s'_i)[A_{k+1}^+A_k\vec{u}_k]_i\cdots[A_n^+A_k\vec{u}_k]_i = u(s_i) \qquad (i = \overline{1,M}). \tag{37}$$

Тут $[\cdot]_i$ — i-й елемент $[\cdot]$, $(u_1,\ldots,u_M)^T = \vec{u}$.

Розв'язок (37) аналогічно (17) запишемо у вигляді

$$([u_k]_i)^n = (u_k(s_i))^n = q_{ki}^T\vec{u} \qquad (k = \overline{1,n}), \tag{38}$$

де

$$(\overline{A}_{ki}|a_{ki})^+ = \begin{pmatrix} Q_{ki} \\ q_{ki}^T \end{pmatrix},$$

$\overline{A}_{ki}$ — матриця $\overline{A}_k$ без $((i-1)(M^{n-1}+M^{n-2}+\cdots+1)+1)$-го стовпця, а a_{ki} — цей стовпець,

$$\overline{A}_k = \mathrm{col}(\underbrace{0,\ldots,0}_{M^{n-1}(i-1)}), A_i^{(k)}, \underbrace{0,\ldots,0}_{M^n - iM^{n-1}}\quad i=\overline{1,M}),$$

$$A_i^{(k)} = \mathrm{str}((\ldots(((\ldots([A_1^+ A_k]_{ij_1}[A_2^+ A_k]_{ij_2}\ldots[A_{k-1}^+ A_k]_{ij_{k-1}}[A_{k+1}^+ A_k]_{ij_{k+1}}\ldots[A_n^+ A_k]_{ij_n},$$
$$j_n=\overline{1,M}),\ldots),j_{k+1}=\overline{1,M}),j_{k-1}=\overline{1,M}),\ldots),j_1=\overline{1,M}).$$

Аналіз

$$\varepsilon_k^2 = \min_{\vec{u}_k\in\mathbb{R}^M}\|A_k\vec{u}_k-\vec{y}\|^2 = \vec{u}_k^+\vec{u}_k - \vec{u}_k^+ A_k P_k^+ A_k^T\vec{u}_k, P_k = A_k^T A_k,$$

$$\delta_k^2 = \min_{\vec{u}_k}\|A_1^+ A_k\vec{u}_k\otimes\cdots\otimes A_{k-1}^+ A_k\vec{u}_k\otimes\vec{u}_k\otimes A_{k+1}^+ A_k\vec{u}_k\otimes\cdots\otimes A_n^+ A_k\vec{u}_k - \vec{u}\|^2 = \tag{39}$$
$$= \vec{u}^T\vec{u} - \vec{u}^T\overline{A}_k\overline{P}_k^+\overline{A}_k^T\vec{u}, \qquad \overline{P}_k = \overline{A}_k^T\overline{A}_k$$

для $k=\overline{1,n}$ дозволяє визначити індекс

$$k = \arg\min_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}(\varepsilon_i^2+\delta_i^2) \tag{40}$$

вектора $\vec{u}_k$, через який, згідно з (35), і буде знайдений розв'язок $\vec{y}$ задачі (30), (7).

Для задачі (30), (21) розв'язок отримаємо, повторюючи викладки п. 3 при $k=\overline{1,n}$. Функція $y(s)$ стану системи (29), знайдена згідно з (21), при цьому визначатиметься співвідношенням (22), в якому індекс k, ε_k^2 та δ_k^2 вибираються за формулами (40), (24) та (39) відповідно, $\vec{u}_k$, $\overline{G}_k(s)$, $\vec{G}_{yk}$, P_k, P_{ij} збігаються з визначеними вище, а

$$\overline{A}_k = \mathrm{col}(\underbrace{0,\ldots,0}_{M^{n-1}(i-1)}), A_i^{(k)}, \underbrace{0,\ldots,0}_{M^n - iM^{n-1}}\quad i=\overline{1,M}),$$

$$A_i^{(k)} = \mathrm{str}((\ldots(((\ldots([P_1^+ P_{1k}]_{ij_1}[P_2^+ P_{2k}]_{ij_2}\ldots[P_{k-1}^+ P_{k-1,k}]_{ij_{k-1}}[P_{k+1}^+ P_{k+1,k}]_{ij_{k+1}}\ldots$$
$$\ldots[P_n^+ P_{nk}]_{ij_n}, j_n=\overline{1,M}),\ldots),j_{k+1}=\overline{1,M}),j_{k-1}=\overline{1,M}),\ldots),j_1=\overline{1,M}).$$

1. *Гантмахер А. Ф.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1967. – 287 с.
2. *Альберт А.* Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. – Москва: Наука, 1977. – 305 с.
3. *Кириченко Н. Ф.* Псевдообращение матриц и их рекуррентность в задачах моделирования и управления // Пробл. управления и информатики. – 1995. – № 1. – С. 114–127.
4. *Кириченко Н. Ф.* Рекуррентность операций псевообращения в задачах идентификации и синтеза матриц // Кибернетика и вычислит. техника. – 1994. – № 104. – С. 17–21.
5. *Кириченко Н. Ф., Стоян В. А.* Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований // Кибернетика и систем. анализ. – 1998. – № 3. – С. 90–104.
6. *Скопецький В. В., Стоян В. А., Кривонос Ю. Г.* Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. – Київ: Наук. думка, 2001. – 361 с.
7. *Стоян В. В.* Псевдоінверсний підхід до розв'язання одного класу нелінійних алгебраїчних рівнянь // Доп. НАН України. – 2008. – № 3. – С. 45–49.
8. *Стоян В. А.* До побудови функцій Гріна для систем з розподіленими параметрами // Вычислит. и прикл. математика. – 1998. – Вып. 83. – С. 108–111.

*Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка*

Надійшло до редакції 05.11.2007