ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2008

МЕХАНІКА

УДК 539.3

Л. В. Назаренко

Долговременная повреждаемость трансверсально-изотропных композитных материалов при дробно-степенной функции долговечности

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л. П. Хорошуном)

The theory of long-term damageability is generalized to the case of a discretely fibrous composite with stochastic structure. The appearance of damages in the composite is modeled by the formation of stochastically positioned micropores. The algorithms of calculation of the temporal dependences of macrostresses, macrodeformations, and the microdamageability of components of a granular material are constructed, and the relevant curves in the case of a fractional power function describing the durability are obtained.

На основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред теория длительной повреждаемости однородного материала построена Л. П. Хорошуном как для однородного материала [1], так и для зернистых композитов. В настоящей работе теория длительной повреждаемости обобщается на случай дискретно-волокнистого композитного материала стохастической структуры. Предполагается, что матрица является изотропной, в то время как включения обладают трансверсально-изотропной симметрией упругих свойств.

Рассматривается случай, когда процесс повреждаемости происходит в матрице рассматриваемого композита. В основу структурной теории длительной повреждаемости композитных материалов положены уравнения механики микронеоднородных сред стохастической структуры. Процесс повреждаемости матрицы рассматриваемого композита моделируется разрушением рассеянных микрообъемов материала и образованием на их месте стохастически расположенных микропор [2]. Критерий разрушения единичного микрообъема характеризуется его длительной прочностью, описываемой дробно-степенной функцией долговечности, определяемой зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Губера–Мизеса [3]. Предел кратковременной прочности принимается случайной функцией координат, одноточечное распределение которой описывается распределением Вейбулла [3]. Эффективные деформативные свойства и напряженно-деформированное состояние композита стохастической структуры определяются на основе стохастических уравнений теории упругости [4].

Построены алгоритмы вычисления зависимостей микроповреждаемости матрицы дискретно-волокнистого композита от времени, макронапряжений или макродеформаций от времени, а также получены соответствующие кривые в случае дробно-степенной функции долговечности.

1. Рассмотрим композитный материал, представляющий собой матрицу, армированную случайно расположенными однонаправленными дискретными волокнами. Предполагается, что матрица изотропная, а включения трансверсально-изотропные, причем в процессе нагружения в матрице возникают микроразрушения, которые моделируются случайно расположенными пустыми микропорами квазисферической формы. Макронапряжения $\langle\sigma_{ij}\rangle$ и макродеформации $\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle$ композита связаны следующими соотношениями:

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = \lambda^*_{ij\alpha\beta}\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle. \qquad (1)$$

Здесь $\lambda^*_{ij\alpha\beta}$ — тензор эффективных упругих модулей, который является функцией тензора упругих модулей поврежденных компонентов $\lambda^{[1]}_{ij\alpha\beta}$, $\lambda^{[2]}_{ij\alpha\beta}$, их объемных концентраций c_1, c_2 и параметров формы включений, причем индексы 1 и 2 обозначают соответственно включения и матрицу. Тензор $\lambda^*_{ij\alpha\beta}$ эффективных модулей упругости дискретно-волокнистого композита с трансверсально-изотропными компонентами можно определить как функцию модулей упругости поврежденных компонентов $\lambda^{[1]}_{ij\alpha\beta}$, $\lambda^{[2]}_{ij\alpha\beta}$, объемного содержания включений c_1 в матрице и параметров формы включений t на основании соотношений, представленных в [4]

$$\lambda^*_{ij\alpha\beta} = \lambda^*_{ij\alpha\beta}(\lambda^{[1]}_{ij\alpha\beta}, \lambda^{[2]}_{ij\alpha\beta}, c_1, t), \qquad t = \frac{t_2}{t_1}, \qquad (2)$$

где t_1, t_2 — размеры полуосей сфероидальных включений в поперечном и продольном направлениях соответственно.

Тензоры модулей упругости поврежденных компонентов $\lambda^{[1]}_{ij\alpha\beta}$, $\lambda^{[2]}_{ij\alpha\beta}$ определяются [5] через тензоры модулей упругости скелетов компонентов $\lambda^1_{ij\alpha\beta}$, $\lambda^2_{ij\alpha\beta}$ и их пористости p_1, p_2, характеризующие поврежденность, т. е.

$$\lambda^{[1]}_{ij\alpha\beta} = \lambda^{[1]}_{ij\alpha\beta}(\lambda^1_{ij\alpha\beta}, p_1), \qquad \lambda^{[2]}_{ij\alpha\beta} = \lambda^{[2]}_{ij\alpha\beta}(\lambda^2_{ij\alpha\beta}, p_2). \qquad (3)$$

На основе зависимостей (2), (3) и соотношений

$$\langle\sigma^r_{ij}\rangle = \lambda^{[r]}_{ij\alpha\beta}\langle\varepsilon^r_{\alpha\beta}\rangle \qquad (r = 1, 2) \qquad (4)$$

можно определить средние напряжения и средние деформации поврежденного r-компонента $\langle\sigma^r_{ij}\rangle$, $\langle\varepsilon^r_{\alpha\beta}\rangle$ как функции макродеформаций или макронапряжений [4]

$$\langle\sigma^r_{ij}\rangle = f_1(\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle), \qquad \langle\varepsilon^r_{ij}\rangle = f_2(\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle), \qquad \langle\sigma^r_{ij}\rangle = f_3(\langle\sigma_{\alpha\beta}\rangle), \qquad \langle\varepsilon^r_{ij}\rangle = f_4(\langle\sigma_{\alpha\beta}\rangle). \quad (5)$$

Средние по скелету r-компонента напряжения связаны со средними напряжениями $\langle\sigma^r_{ij},\rangle$ $(r = 1, 2)$ поврежденного r-компонента зависимостями

$$\overline{\sigma}^r_{ij} = \frac{1}{1 - p_r}\langle\sigma^r_{ij}\rangle \qquad (r = 1, 2). \qquad (6)$$

Для случая, когда процесс накопления повреждений происходит в матрице, примем критерий кратковременного разрушения в микрообъеме неповрежденной части материала матрицы в форме Губера–Мизеса [3]

$$I^2_{\overline{\sigma}} = k_2; \qquad I^2_{\overline{\sigma}} = (\overline{\sigma}^{2\,\prime}_{ij}, \overline{\sigma}^{2\,\prime}_{ij})^{1/2}, \tag{7}$$

где $\overline{\sigma}^{2\,\prime}_{ij}$ — девиатор средних по неповрежденной части материала матрицы напряжений; k_2 — предельное значение инварианта $I^2_{\overline{\sigma}}$, являющееся случайной функцией координат.

Если инвариант $I^2_{\overline{\sigma}}$ для некоторого микрообъема материала матрицы не достигает соответствующего предельного значения k_2, то, согласно критерию длительной прочности, разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени τ^2_k, длительность которого зависит от степени близости $I^2_{\overline{\sigma}}$ к предельному значению k_2. В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau^2_k = \varphi(I^2_{\overline{\sigma}}, k_2), \tag{8}$$

причем $\varphi(k_2, k_2) = 0$, $\varphi(0, k_2) = \infty$, согласно (7).

Одноточечную функцию распределения $F(k_2)$ параметра k_2 можно описывать распределением Вейбулла

$$F(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_{02}, \\ 1 - \exp(-m_2(k_2 - k_{02})^{\alpha_2}), & k_2 \geqslant k_{02}, \end{cases} \tag{9}$$

где k_{02} — минимальная величина предельного значения k_2, с которого начинается разрушение в некоторых микрообъемах материала матрицы; m_2, α_2 — постоянные, характеризующие разброс микропрочности в материале.

Пусть до начала деформирования композита начальная микроповрежденность матрицы характеризуется пористостью p_{02}. Тогда функция распределения $F(k_2)$, согласно свойству эргодичности, определяет относительное содержание материала неразрушенной части матрицы, где предел микропрочности меньше соответствующего значения k_2. Поэтому, если в неразрушенной части материала матрицы напряжения равны $\overline{\sigma}^2_{ij}$, то функция $F(I^2_{\overline{\sigma}})$ определяет, согласно (7), (9), относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета матрицы. Тогда уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости имеет вид [2]:

$$p_2 = p_{02} + (1 - p_{02})F(I^2_{\overline{\sigma}}). \tag{10}$$

Если напряжения в матрице $\overline{\sigma}^2_{jk}$ действуют в течение некоторого времени t, то, согласно критерию длительной прочности (8), за это время разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k_2, для которых имеет место неравенство

$$t \geqslant \tau^2_k = \varphi(I^2_{\overline{\sigma}}, k_2), \tag{11}$$

где инвариант $I^2_{\overline{\sigma}}$ определяется выражениями (7).

Время τ^2_k хрупкого разрушения для реальных материалов при невысоких температурах имеет конечное значение, начиная только с некоторого значения $I^2_{\overline{\sigma}} > 0$. В этом случае функцию долговечности $\varphi(I^2_{\sigma}, k_2)$ можно представить, например, дробно-степенной зависимостью [1]

$$\varphi(I^2_{\sigma}, k_2) = \tau_{02}\left(\frac{k_2 - I^2_{\sigma}}{I^2_{\sigma} - \gamma_2 k_2}\right)^{n_2}; \qquad (\gamma_2 k_2 \leqslant I^2_{\sigma} \leqslant k_2,\ \gamma_2 < 1). \tag{12}$$

Здесь τ_{02} — некоторое характерное время, показатель n_2 и коэффициент γ_2 определяются из аппроксимации экспериментальных кривых долговечности материала.

Подставляя (12) в (11), приходим к неравенству

$$k_2 \leqslant I^2_{\sigma}\frac{1 + \overline{t}_2^{1/n_2}}{1 + \gamma_2\overline{t}_2^{1/n_2}} \qquad \left(\overline{t}_2 = \frac{t}{\tau_{02}}\right). \tag{13}$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F(k_2)$, приходим к выводу, что функция $F[I^2_{\sigma}\psi(\overline{t}_2)]$, где

$$\psi(\overline{t}_2) = \frac{1 + \overline{t}_2^{1/n_2}}{1 + \gamma_i\overline{t}_i^{1/n_2}}, \tag{14}$$

определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала матрицы в момент времени $\overline{t}_2$. Тогда с учетом (6) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости при длительной повреждаемости можно представить в виде

$$p_2 = p_{02} + (1 - p_{02})F\left[\frac{I^2_{\langle\sigma\rangle}}{1 - p_2}\psi(\overline{t}_2)\right], \tag{15}$$

где пористость p_2 является функцией безразмерного времени $\overline{t}_2$, а инвариант $I_{\langle\sigma\rangle}$ определяется выражением (7) и является функцией макродеформаций или макронапряжений, согласно (5).

Уравнения баланса пористости (15) с учетом (7), (14) в начальный момент $\overline{t}_2 = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала. С ростом времени уравнения (15), (7), (14) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной и дополнительной поврежденности, развивающейся во времени.

2. На основе соотношений (2), (3), (7), (14), (15) можно определить объемное содержания микроповреждений дискретно-волокнистого композита с трансверсально-изотропными включениями в матрице и напряженно-деформированное состояние для функции $\psi(\overline{t}_2)$, определяемой формулой (14), как при заданных макронапряжениях $\langle\sigma_{jk}\rangle$, так и при заданных макродеформациях $\langle\varepsilon_{jk}\rangle$. В качестве включений и матрицы взяты соответственно кварц с характеристиками неповрежденной части

$$\lambda^1_{11} = 118{,}4\ \text{ГПа}, \quad \lambda^1_{33} = 107\ \text{ГПа}, \quad \lambda^1_{13} = 32\ \text{ГПа}, \quad \lambda^1_{12} = 19\ \text{ГПа}, \quad \lambda^1_{44} = 35{,}8\ \text{ГПа} \tag{16}$$

и эпоксидная матрица с характеристиками неповрежденной части:

$$E^2 = 3\ \text{ГПа}; \qquad \nu^2 = 0{,}35, \tag{17}$$

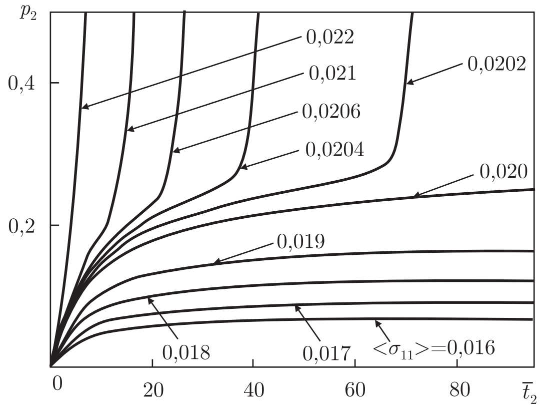

Рис. 1

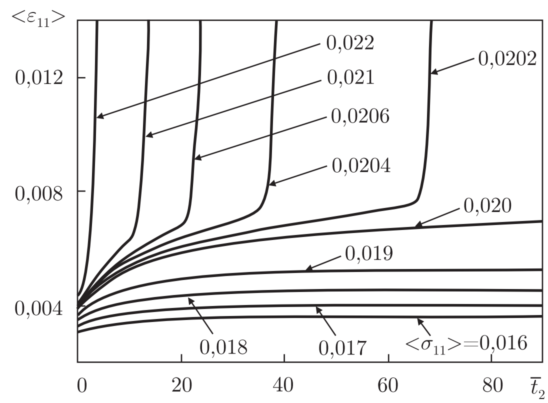

Рис. 2

объемной концентрации включений, начальном содержании пор в матрице и форме включений

$$c_1 = 0{,}25; 0{,}5; 0{,}75, \qquad p_{02} = 0; \qquad t = 2, \tag{18}$$

а также при

$$k_{02} = 0{,}011\text{ГП}a; \qquad m_2 = 1000; \qquad \alpha_2 = 2; \qquad \gamma_2 = 0{,}5; \qquad n_2 = 1. \tag{19}$$

На рис. 1 изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени $\overline{t}_2$ для объемного содержания включений $c_1 = 0{,}25$ при различных значениях макронапряжения $\langle\sigma_{11}\rangle$. На рис. 2 показаны кривые зависимостей макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle$ от времени $\overline{t}_2$ для объемных содержаний включений $c_1 = 0{,}25$ при различных значениях макронапряжения $\langle\sigma_{11}\rangle$. Как видим, при $c_1 = 0{,}25$ для значений $\langle\sigma_{11}\rangle = 0{,}016$, $0{,}017$, $0{,}018$, $0{,}019$, $0{,}020$ ГПа рост макродеформацийи и накопление повреждений во времени имеет горизонтальную асимптоту, т. е. его характер аналогичный экспериментальным кривым для полимеров [5]. В случае же, когда макронапряжения превосходят эти значения, для некоторых значений времени $\overline{t}_2$ макродеформации и поврежденность матрицы достигают критической величины, являющейся началом разрушения материала.

На рис. 3 изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени $\overline{t}_2$ при значениях макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle = 0{,}002$, $0{,}006$, $0{,}01$ и различных значениях объемного содержания включений c_1. На графиках сплошной линией показаны кривые при объемном содержании включений $c_1 = 0{,}25$, штриховой — при $c_1 = 0{,}5$, пунктирной — при $c_1 = 0{,}75$. Такие же обозначения приняты и на рис. 4. Графики показывают, что с увеличением макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle$ для всех объемных содержаний включений и произвольного значения времени $\overline{t}_2$ микроповрежденность p_2 увеличивается. Здесь наблюдается рост поврежденности со временем, в то время как в экспериментах с полимерами [6] при фиксированной деформации поврежденность заметным образом не изменяется. Такое расхождение можно объяснить как релаксацией напряжений в полимерах, обусловленной ползучестью, которая здесь не учитывается, так и приближенностью рассматриваемой модели повреждаемости в конечновременной форме.

На рис. 4 показаны кривые зависимостей макронапряжения $\langle\sigma_{11}\rangle$ от времени $\overline{t}_2$ при значениях макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle = 0{,}002$, $0{,}006$, $0{,}01$ и различных значениях объемного

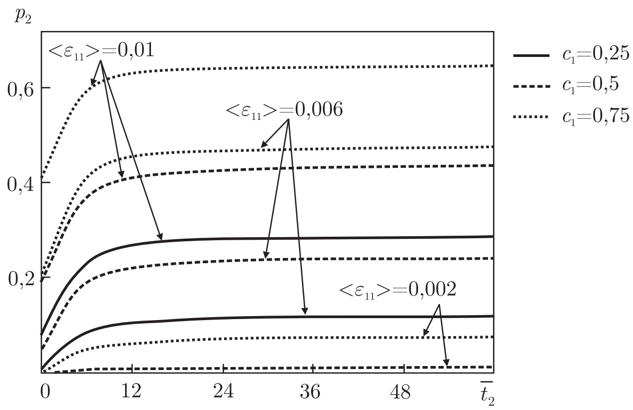

Рис. 3

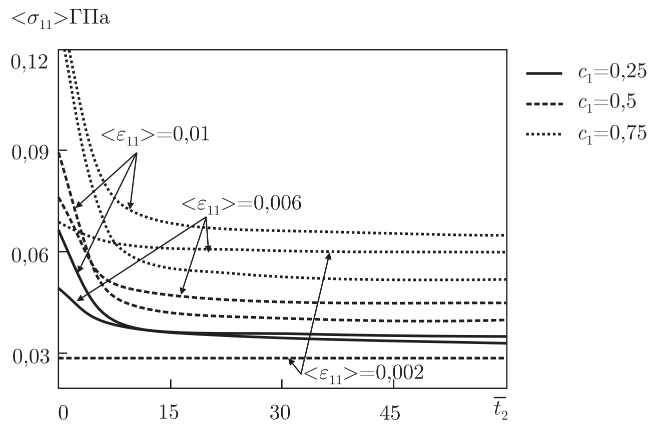

Рис. 4

содержания включений c_1. Как видим, при всех значениях объемного содержания включений кривые являются нисходящими.

1. *Khoroshun L. P.* Principles of the micromechanics of material damage. 2. Long-term damage // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No 2. – P. 127–135.
2. *Khoroshun L. P.* Micromechanics of short-term thermal microdamageability // Ibid. – 2001. – **37**, No 9. – P. 1158–1165.
3. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 312 с.
4. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикула Е. Н., Назаренко Л. В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с. (Механика композитов: В 12-ти т. Т. 3.).
5. *Nazarenko L. V.* Thermoelastic properties of orthotropic porous materials // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No 2. – P. 114–122.
6. *Тамуж В. П., Куксенко В. С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 24.10.2007