

А. С. Костинский

## Классическое описание очага землетрясения с точки зрения сопутствующих дифференцируемых отображений: восстановление параметров и иерархия моделей

(Представлено академиком НАН Украины В. И. Старостенко)

*A generalized approach to the appreciation of “traditional” mathematical models of earthquake focus is analyzed. It is assumed that the system of equations for model parameters can be formulated. If the analytical form of the system is known, a mapping of the set of parameters to the set of “observables” is determined. The properties of the mapping can serve, as it is asserted, a characteristic of the model. The images of regions in the space of parameters (“maps of mappings”) allow one to visualize an information about the number of possible solutions of the system as a function of a point in the space of “observables” and about a generalized “response” of the system (the loss of solutions, and a change of the number of solutions) as a consequence of the variation of experimental data. The results can be used for the computation of building structures in seismoactive zones.*

Математическое моделирование очага землетрясения — одно из традиционных направлений сейсмологических исследований. Проблема принципов ориентации, “компаса” в мире очаговых моделей становится все более актуальной. Как можно оценить очаговую модель? Привычный аргумент в пользу модели — соответствие между теоретической сейсмограммой и излучением реальных сейсмических источников (хотя бы по одному признаку). Например, традиционные модели 1970-х годов [1–3] правильно описывали особенности поведения спектра смещения в дальней зоне, и этого оказалось достаточно. Строго говоря, если исключить полуэмпирические рецепты и интуицию исследователя, такой подход требует сравнения функций. Выражаясь языком квантовой механики, это — “волновое представление” модели, величина, которую можно измерить (“наблюдаемая”), есть смещение в точке наблюдения как функция времени. Для разных моделей мы получаем разные функции, т. е. разные вектора бесконечномерного гильбертова пространства. Результат наблюдений (запись землетрясения) — опорная точка в этом пространстве. Расстояние до опорной точки измеряется как интеграл от квадрата разности по отрезку, на котором запись ближе всего к теоретическому импульсу (отдельная проблема — найти этот отрезок). Расстояние характеризует модель, параметры которой играют подчиненную роль. Варьируя параметры, мы должны добиться минимума расстояния, и этот минимум (положительное число) уже не только характеристика, но и мера качества модели в волновом представлении.

Изменим цель, сформулировав ее как задачу расчета (можно использовать, как представляется, термин “восстановление”) параметров модели по данным на одной или группе станций. Это — “координатное представление” модели, когда на первый план выходит дискретный набор ее параметров (“координат” в пространстве всевозможных способов описания). Оговоримся сразу, что рассматриваться будут только последовательно математи-

ческие алгоритмы расчета, в основе которых лежит система уравнений относительно параметров. Чтобы замкнуть систему, необходим набор наблюдаемых величин, в данном случае это должны быть вещественные числа, сконструированные по сейсмограмме. Возможны разные “рецепты” наблюдаемых функционалов, один из них был предложен автором в работе [4]; он очень прост и состоит в следующем.

Пусть для некоторой модели очага получено смещение в точке наблюдения как функция времени, зависящая от  $k$  параметров модели  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ . Пусть существуют и сходятся некоторые из интегралов по времени от этой функции с весовыми множителями  $f(t) = t^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , взятые по всей области определения (конечной или бесконечной). Не будем предполагать, что сходятся все такие интегралы; требуется только, чтобы число сходящихся интегралов достигло  $k$ . Если удастся вычислить в аналитическом виде  $k$  интегралов по времени от функции смещения (не обязательно соответствующих последовательным значениям  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), мы получаем  $k$  функций:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k), \\ u_2 &= u_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k), \\ &\dots\dots\dots \\ u_k &= u_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k), \end{aligned} \tag{1}$$

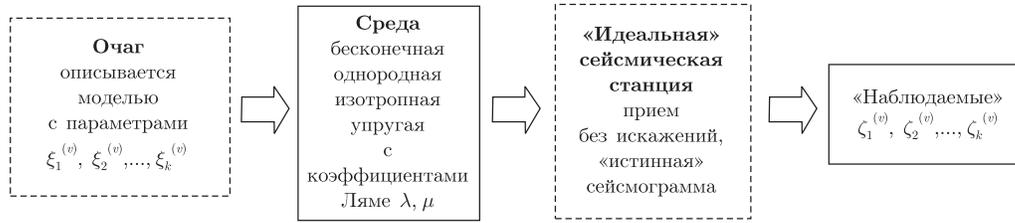
каждая из которых зависит от  $k$  параметров модели. Для каждого набора числовых значений параметров интегралы — конкретные числа, поэтому искомую систему можно получить, заменяя левые части соотношений (1) на текущие значения наблюдаемых  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ . Приравнявая, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= u_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k), \\ \zeta_2 &= u_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k), \\ &\dots\dots\dots \\ \zeta_k &= u_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k), \end{aligned} \tag{2}$$

из которой в принципе можно найти числовые значения  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ , соответствующие данному сейсмическому событию (очагу) и выбранной модели. Число весовых функций, обеспечивающих сходящийся интеграл от смещения, может быть больше, чем число параметров модели  $k$ ; в таком случае возникнут разные наборы  $k$  функций (1) и разные системы уравнений (2), каждую из которых можно исследовать на предмет восстановления параметров.

Конечно, измеряя по записи значения наблюдаемых и решая систему уравнений (2), можно определить конкретные параметры модели, но помимо этого очевидного назначения, система имеет и другое. Свойства системы уравнений (2) и порождаемого ею отображения множества параметров во множество наблюдаемых, в сущности, не имеют отношения к эксперименту (реальным сейсмическим событиям) и служат характеристикой модели. Каждая система уравнений такого рода возникает как элемент мысленного эксперимента или “игры в измерения”, обнаруживающей “внутренние степени свободы” модели. Именно, мы моделируем ситуацию.

Мысленный эксперимент: идеальная схема восстановления параметров модели по интегралам от функции смещения:



(Пунктирная линия означает “истинные” (скрытые) данные; сплошная — сведения, которые имеются в нашем распоряжении и требуется восстановить, насколько это возможно, “истину” по известной информации.) “Истина” условна, только правила “игры” определяют, что в данном случае играет роль “лежащего на поверхности”, а что “спрятано”. Любой элемент схемы, функция или параметр, может рассматриваться как “истина” и неизвестное в соответствующей обратной задаче. Чтобы избежать слишком большого числа неизвестных, что-то неизбежно приходится переводить в ранг “лежащего на поверхности” (в данной “игре” это среда), а что-то вообще исключать (аппаратурные искажения в точке приема). Мы задаем модель очага, описываемую параметрами  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ , модель среды (по необходимости, как можно более простую) и точку наблюдения. Если считать (вынужденно), что “идеальная” сейсмическая станция принимает сигнал без искажений (имеет частотную характеристику с бесконечно широкой полосой пропускания), то нет необходимости в деконволюции (восстановлении “истинного” смещения). Для каждого набора числовых значений  $\xi_1^{(v)}, \xi_2^{(v)}, \dots, \xi_k^{(v)}$  мы получаем “истинную” сейсмограмму (кривую), но исходим только из дискретного множества числовых значений “наблюдаемых”  $\zeta_1^{(v)}, \zeta_2^{(v)}, \dots, \zeta_k^{(v)}$ . Процесс решения системы (2) с вектором  $\zeta_1^{(v)}, \zeta_2^{(v)}, \dots, \zeta_k^{(v)}$  в левой части может иметь разный результат, и этот результат (например, определенными свойствами) зависит от конкретных значений  $\zeta_1^{(v)}, \zeta_2^{(v)}, \dots, \zeta_k^{(v)}$ . Можно поэтому убрать индекс  $v$  (означающий “value”) и рассматривать всевозможные исходы “игры” в пространстве текущих значений  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ .

Представим себе, что наши математические способности безграничны, и мы имеем возможность для любого набора значений переменных  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$  найти все решения системы относительно  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ . Все, ибо системы, с которыми придется иметь дело, наверняка нелинейны и имеют в целом более чем одно решение. Вообще число решений — функция точки в пространстве переменных  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ , “острова” вещественных решений разбросаны в “океане”, где вещественных решений нет. На каждом “острове” свое число решений, некоторые решения существуют только на части “острова”. “Океан” не обязательно существует, части “суши” могут сливаться, образуя “континент”. Можно говорить о “контурной карте архипелага” (многомерной, в координатах  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ ), на которую нанесены границы области существования каждого из вещественных решений. “Рельеф местности” в данном случае — сами решения, т. е. вектора  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  в зависимости от точки  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ . Нанеся на “контурную карту” “рельеф”, получим “топографическую карту”, содержащую полную информацию о системе. Это, по сути, информационный “портрет” системы, такая “карта” трудноопределимым образом связана с “качеством” системы. Как пример допустим, что “архипелаг” состоит из одного маленького “острова” круглой формы, на котором определено только одно вещественное решение, имеющее (в многомерном варианте) вид высокого “горного пика”, круто обрывающегося в “океан”. Малые изменения координат  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$

не только сильно меняют параметры  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  как функции  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ , но и выводят за пределы “острова”, в “океан”, где решение исчезает. Система, порождающая “карту”, обнаруживает в этом случае внутреннюю неустойчивость и должна быть признана “ненадежной” и даже “очень ненадежной”. Можно оценить “качество” системы как невысокое по некоторой условной шкале SQS (System’s Quality Scale), естественный нуль которой — ситуация, когда система вообще не имеет вещественных решений. Отметка “высокого качества” на шкале SQS — ситуация, когда на “карте” — только “суша”, число решений постоянно, а “рельеф” не слишком сильно меняется в зависимости от координат  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$  (“не слишком сильно” появляется по аналогии с оценкой волнения моря). Что касается промежуточных значений “качества”, фактически требуется установить соответствие между числами натурального ряда и “топографией” (в буквальном смысле “описанием места”), оцениваемой с точки зрения возможности восстановления параметров. Сложность задачи несомненна. Например, кажется очевидным, что чем большая часть “карты” занята “сушей”, тем лучше. Но “суша” может иметь вид “фиордов” или “шхер”, что сильно понижает “качество” (по любым оценкам) благодаря “распределенной” неустойчивости.

Построим “топографические карты” для всех систем модели. Такой “топографический атлас” содержит полную информацию о модели (при заданном правиле образования “наблюдаемых”) и еще более трудноопределимым способом (по сравнению с отдельными системами) связан с “качеством” модели. Снова допустим в качестве примера, что “архипелаг” на “карте” каждой из систем состоит либо из маленького круглого “острова” с острым “горным пиком”, либо из множества “крошек” мелких “островов”. Иначе говоря, каждая из систем обнаруживает (в разных вариантах) высокую степень внутренней неустойчивости и, следовательно, “очень ненадежна”. Но теперь и сама модель должна быть признана “очень ненадежной”. Можно оценить “качество” модели как невысокое по некоторой условной шкале MQS (Model’s Quality Scale), естественный нуль которой — ансамбль ситуаций (или “составная” ситуация), когда ни одна из систем модели не имеет вещественных решений. Отметка “высокого качества” на шкале MQS — “составная” ситуация, когда на всех “картах” — только “суша”, число решений постоянно (но может различаться для разных “карт”), а “рельеф” (в среднем по ансамблю, т. е. по всем “картам” “атласа”) не слишком сильно меняется в зависимости от координат  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ . Что касается промежуточных значений “качества” модели, то теперь требуется сопоставить числа натурального ряда и набор “топографий” (“описаний места”), что представляет, несомненно, еще более сложную задачу, чем калибровка шкалы “качества” отдельных систем.

К сожалению, возможности поиска решений для нелинейных систем всегда ограничены, не существует эффективных алгоритмов, позволяющих найти все решения в конечной области, с гарантией, что это действительно все решения. Поэтому в большинстве случаев полный “топографический атлас” недоступен. Тем не менее, если известен аналитический вид систем уравнений, можно опираться на свойства отображения множества параметров во множество “наблюдаемых”. Таким путем можно построить, конечно, только “контурные карты”, например, полная “контурная карта” “архипелага” системы есть образ пространства переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ . Положение упрощается, если принять во внимание, что, пока речь идет о простых моделях, представляют интерес не любые вещественные, а только положительные и ограниченные значения параметров. Соответствующие “карты отображений” не содержат “рельефа” и, следовательно, не дают полной информации о “реакции” решений на малые изменения “географических” координат  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ . Поэтому такие “карты” недостаточны для оценок “качества”, но все же могут многое сказать о свойствах модели.

*Дифференцируемые отображения как инструмент, общая схема “карты отображений”, несколько слов о корректности задачи восстановления.*

Функции  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , для любых “разумных” моделей непрерывно дифференцируемые вблизи любой точки  $N_0^{(p)}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_k)$  пространства параметров  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ , осуществляют отображение окрестности этой точки на окрестность точки  $N_0^{(e)}(\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \dots, \bar{\zeta}_k)$  пространства “экспериментальных” переменных  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ . Координаты  $\bar{\xi}_m$  и  $\bar{\zeta}_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, k$  связаны соотношениями (2). Отображение взаимно однозначно, если якобиан

$$J^{(k)} = \frac{D(u_1, u_2, \dots, u_k)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)}$$

отличен от нуля в точке  $N_0^{(p)}$ . Локальное условие нарушения однозначности

$$J^{(k)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = 0 \tag{3}$$

задает  $(k-1)$ -мерную поверхность в пространстве параметров, которая может вырождаться в многообразие меньшего числа измерений или вообще не содержать ни одной вещественной точки. Поверхность (3), несомненно, играет ключевую роль и должна быть в первую очередь исследована для всевозможных систем (2), соответствующих разным наборам весовых функций.

Каждой замкнутой области  $D_\xi$  переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  (а, как правило, мы всегда можем указать область изменения параметров, которая нас интересует) отображение

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \rightarrow \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$$

ставит в соответствие замкнутую область  $D_\zeta$  экспериментальных переменных  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ . Будем рассматривать только конечные в строго математическом смысле области, хотя, возможно, они будут “практически бесконечны” (один или несколько размеров очень велики в масштабах задачи). Области  $D_\xi$  и  $D_\zeta$  есть области в координатном пространстве  $R_k$  (пространстве наборов  $k$  вещественных чисел). “Естественное” представление переменных  $\xi$  и  $\zeta$  как прямоугольных координат точки фактически означает внесение евклидовой метрики,  $R_k \rightarrow E_k$ , преобразование (2) в этом случае должно рассматриваться как преобразование евклидова пространства  $E_k$ . Требуется, конечно, чтобы координаты  $\xi$  (и  $\zeta$ ) имели одинаковую размерность, тогда можно измерять не только длины (расстояния между точками), но и площади областей.

Если якобиан  $J^{(k)}$  не обращается в нуль ни в одной точке  $D_\xi$ , то каждая точка  $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) \in D_\zeta$  соответствует только одной точке  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \in D_\xi$ , в области  $D_\zeta$  существует единственное (вещественное) решение (2) из  $D_\xi$ :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= v_1(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k), \\ \xi_2 &= v_2(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k), \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_k &= v_k(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k), \end{aligned} \tag{4}$$

а функции (4), осуществляющие обратное отображение, непрерывны в  $D_\zeta$ . Близость точек (стремление к пределу) можно понимать в смысле евклидовой нормы. Тем самым, по Куранту, для пары множеств  $(D_\xi, D_\zeta)$  выполнены условия корректности задачи восстановления

параметров. Заметим, с одной стороны, что даже для конечных областей непрерывность функций (4) не исключает того, что приращение параметров  $\xi$ , соответствующее малым приращениям “экспериментальных” переменных  $\zeta$ , может быть очень (хотя бы в “житейском” смысле) велико. С другой стороны — в данной задаче требование единственности не является естественным. Даже два близких значения радиуса площадки, попадающих в “разумные” пределы (а оценки радиуса в зависимости от силы землетрясения относительно хорошо известны) должны считаться равноценными и ни одно из них не является предпочтительным. Это тем более относится к “тонким” характеристикам, таким, как отношение времени распространения процесса к времени нарастания, о которых, как правило, неизвестно вообще ничего. Существующие грубые оценки сверху, например, для скорости распространения разрыва, подразумевают вполне определенный физический объект (круговую трещину сдвига). Все более усложняющиеся модели, в которых доля феноменологии неизбежно растет, а параметры приобретают абстрактный характер, теряют связь с привычной интерпретацией. В условиях, когда “наблюдаемыми” являются интегральные средние, нельзя заведомо предполагать, что какое-то решение не несет информации о процессе. Имеет смысл поэтому оставить в определении корректности только существование решений и непрерывную зависимость каждого из них от данных задачи (означающую “устойчивость” в строго математическом смысле).

Предположим, что (для одной из возможных систем (2)) построен образ  $S_\zeta$  некоторой “стандартной” области  $S_\xi$  (“карта отображений”). Если поверхность нулевого якобиана (3) содержит точки, лежащие в  $S_\xi$ , образ  $S_\zeta$  включает подобласти  $A_\zeta$ , каждой точке которых соответствует единственное решение из  $S_\xi$  (одна точка в  $S_\xi$ ):

$$(A_\xi \in S_\xi) \leftarrow A_\zeta.$$

Кроме того, в  $S_\zeta$  есть области “двойного листа”  $B_\zeta$  и “многолистные” области  $C_\zeta, D_\zeta, \dots$ , каждой точке которых соответствуют два или больше вещественных решений из  $S_\xi$  (точек в  $S_\xi$ ),

$$\begin{aligned} (B_\xi^{(1)} \in S_\xi) \leftarrow B_\zeta, & \quad (B_\xi^{(2)} \in S_\xi) \leftarrow B_\zeta, \\ (C_\xi^{(1)} \in S_\xi) \leftarrow C_\zeta, & \quad (C_\xi^{(2)} \in S_\xi) \leftarrow C_\zeta, \quad (C_\xi^{(3)} \in S_\xi) \leftarrow C_\zeta, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

В целом получается “мозаичная” картина”:

$$\begin{aligned} S_\xi &= A_\xi + (B_\xi^{(1)} + B_\xi^{(2)}) + (C_\xi^{(1)} + C_\xi^{(2)} + C_\xi^{(3)}) + \dots, \\ S_\zeta &= A_\zeta + B_\zeta + C_\zeta + \dots, \end{aligned}$$

задача восстановления параметров корректна в указанном выше смысле для каждой из простых и “сложных” пар:

$$\begin{aligned} (A_\xi, A_\zeta), \\ (B_\xi, B_\zeta), \quad B_\xi &= (B_\xi^{(1)}, B_\xi^{(2)}), \\ (C_\xi, C_\zeta), \quad C_\xi &= (C_\xi^{(1)}, C_\xi^{(2)}, C_\xi^{(3)}), \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

(одна большая латинская буква может означать набор областей). Предполагается, что области  $B_{\xi}^{(1)}, B_{\xi}^{(2)}, \dots$  содержат точки, близкие к точкам поверхности нулевого якобиана, но не совпадающие с ними.

Таким образом, исчерпывается взгляд на проблему в общем. Для очаговой модели [5] с функцией скачка смещения

$$\Delta U(\rho, t) = \begin{cases} K v \sqrt{t^2 - \left(\frac{\rho}{v}\right)^2} H\left(t - \frac{\rho}{v}\right) H(\rho_0 - \rho) & \text{для } t < \sqrt{T_{\max}^2 + \left(\frac{\rho}{v}\right)^2}, \\ \max_t \Delta U(\rho, t) = K v T_{\max} H(\rho_0 - \rho) & \text{для } t > \sqrt{T_{\max}^2 + \left(\frac{\rho}{v}\right)^2} \end{cases}$$

и независимыми параметрами  $\tau = \rho_0/v, T_{\max}$  “карты отображений” анализировались в работе автора [6], как итог модель можно назвать моделью “среднего качества”, скорее “плохой”, чем “хорошей”.

1. *Molnar P., Tucker B. E., Brune J. N.* Corner frequencies of P- and S-waves and models of earthquake sources // *Bull. Seism. Soc. Amer.* – 1973. – **63**. – P. 2091. – 2104.
2. *Sato T., Hirasawa T.* Body wave spectra from propagating shear crack // *J. Phys. Earth.* – 1973. – **21**. – P. 415–431.
3. *Dahlen F. A.* On the ratio of P-wave to S-wave corner frequencies for shallow earthquake sources // *Bull. Seism. Soc. Amer.* – 1974. – **64**. – P. 1159–1180.
4. *Kostinsky A. S.* A calculation of kinematic model parameters for a focus from integral characteristics of a spectrum of body waves // *Доп. НАН України.* – 1995. – No 5. – С. 88–90.
5. *Kostinsky A. S.* A quasi-dynamic model of focus with constant maximum value of displacement discontinuity: theoretical seismograms // *Там само.* – 2000. – No 7. – С. 139–142.
6. *Костинский А. С.* “Карты отображений” очаговой модели как элемент автоматизированной системы обработки сейсмических записей // *Там само.* – 2003. – № 2. – С. 110–118.

*Отдел сейсмологии Института геофизики  
им. С. И. Субботина НАН Украины, Симферополь*

*Поступило в редакцию 16.07.2007*