2. *Aomoto K.* Hypergeometric functions: the past, today and ... (from the complex analytic point of view) // Sugaku Expositions. – 1996. – **9**. – P. 99–116.
3. *Andrews L. C., Askey R., Roy R.* Special functions. – New York: Cambridge University Press, 1999. – 664 p.
4. *Wright E. M.* On the coefficient of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. – 1933. – **8**. – P. 71–79.
5. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-transforms. – London: Charman and Hall, 2004. – 390 p.
6. *Virchenko N. O.* On some generalizations of gamma functions // Доп. НАН України. – 1999. – № 10. – С. 39–44.
7. *Al-Musallam F., Kalla S. L.* Asymptotic expansions for generalized gamma and incomplete gamma functions // Appl. Anal. – 1997. – **66**. – P. 173–187.
8. *Kobayashi K.* On generalized gamma functions occurring in diffraction theory // J. Phys. Soc. Jap. – 1991. – **60**. – P. 1501–1512.
9. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
10. *Widder D. V.* The Laplace transform. – Princeton: Princeton University Press, 1946. – 276 c.

НТУ України "Київський політехнічний інститут" *Надійшло до редакції 10.10.2007*

УДК 517.9

Н. В. Задоянчук, П. О. Касьянов

Про розв'язність диференціально-операторних включень II порядку з некоерцитивними операторами W_{λ_0}-псевдомонотонного типу

(Представлено членом-кореспондентом НАН України $\boxed{\text{В. С. Мельником}}$*)*

We consider the second-order differential-operator inclusions with operators of the pseudomonotone type. The existence of solutions for the Cauchy problem for such inclusions by using the singular perturbation method is justified. The important a priori estimates have been obtained. An example that illustrates the given result is presented.

Диференціально-операторні включення та еволюційні варіаційні нерівності, що зводяться до них, вивчаються досить інтенсивно багатьма дослідниками [1–5]. По аналогії з диференціально-операторними рівняннями II порядку, еволюційні включення II порядку зводяться до диференціально-операторних включень I порядку, а потім, з використанням відомих методів, для них доводиться розв'язність. При перенесенні цієї техніки на включення еволюційного типу з некоерцитивними відображеннями виникають істотні технічні складності.

У даній роботі розглядаються еволюційні включення II порядку з некоерцитивними багатозначними відображеннями. Для досить широкого класу істотно багатозначних відображень доводиться їх розв'язність та виводяться апріорні оцінки для розв'язків. Як приклад розглядається клас задач з нелінійними операторами, для якого доводиться розв'язність. Одержані результати є новими і для рівнянь також.

Постановка задачі. Нехай $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$ и $(V_2, \|\cdot\|_{V_2})$ — деякі рефлексивні сепарабельні банахові простори, неперервно вкладені в гільбертів простір $(H, (\cdot,\cdot))$ так, що

$$V := V_1 \bigcap V_2 \text{ щільний в просторах } V_1, V_2 \text{ і } H,$$

причому одне з вкладень $V_i \subset H$ є компактним.

Ототожнюючи $H \cong H^*$, маємо

$$V_1 \subset H \subset V_1^*, \qquad V_2 \subset H \subset V_2^*$$

з неперервними і щільними вкладеннями [6], де $(V_i^*, \|\cdot\|_{V_i^*})$ — топологічно спряжений до V_i простір відносно канонічної білінійної форми

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_i} : V_i^* \times V_i \to \mathbb{R}$$

$(i = 1, 2)$, яка збігається на H зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ в H. Розглянемо функціональні простори

$$X_i = L_{r_i}(S; H) \bigcap L_{p_i}(S; V_i),$$

де $S = [0, T]$, $0 < T < +\infty$, $1 < p_i \leqslant r_i < +\infty$ $(i = 1, 2)$. Простори X_i — рефлексивні банахові простори з нормами $\|y\|_{X_i} = \|y\|_{L_{p_i}(S;V_i)} + \|y\|_{L_{r_i}(S;H)}$. Розглянемо рефлексивний банахів простір $X = X_1 \bigcap X_2$ з нормою $\|y\|_X = \|y\|_{X_1} + \|y\|_{X_2}$. Зауважимо, що простір X неперервно та щільно вкладений в Y, тобто норма $\|\cdot\|_Y$ є неперервною відносно $\|\cdot\|_X$ на X.

Ототожнимо простори $L_{q_i}(S; V_i^*) + L_{r_i'}(S; H)$ і X_i^*. Аналогічно,

$$X^* = X_1^* + X_2^* \equiv L_{q_1}(S; V_1^*) + L_{q_2}(S; V_2^*) + L_{r_1'}(S; H) + L_{r_2'}(S; H), \qquad Y^* \equiv Y,$$

де $r_i^{-1} + r_i'^{-1} = p_i^{-1} + q_i^{-1} = 1$. На $X^* \times X$ задано форму двоїстості $\langle f, y\rangle$ [6].

Нехай оператори $A, B : X \rightrightarrows X^*$ — багатозначні відображення псевдомонотонного типу, $C : X \to X^*$ — деякий однозначний оператор. Ставиться задача Коші про розв'язність диференціально-операторного включення методом сингулярних збурень:

$$\begin{cases} y'' + Ay' + By + Cy \ni f, \\ y(0) = a_0, \qquad y'(0) = \bar{0}, \qquad y \in C(S; V), \qquad y' \in W, \end{cases} \tag{1}$$

де $a_0 \in V$ та $f \in X^*$ — довільні фіксовані елементи, а простір $W = \{y \in X \mid y' \in X^*\}$, де похідна y' елемента $y \in X$ розглядається в сенсі простору скалярних розподілів $\mathcal{D}^*(S; V^*) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(S); V_w^*)$, з $V = V_1 \bigcap V_2$, V_w^* рівний V^* з топологією $\sigma(V^*, V)$. На W введемо норму графіка похідної:

$$\|y\|_W = \|y\|_X + \|y'\|_{X^*} \quad \text{для будь-якого} \quad y \in W.$$

Зауважимо, що простір W компактно вкладений в Y, тобто норма $\|\cdot\|_Y$ є компактною відносно $\|\cdot\|_W$ на W [7]. Також очевидно, що простір W неперервно вкладений в $C(S; V^*)$. Тому початкові умови мають сенс.

Класи відображень. Нехай Y — деякий банахів простір, Y^* — його топологічно спряжений простір, $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y : Y^* \times Y \to \mathbb{R}$ — спарювання. Для багатозначного відображення

$A\colon Y \rightrightarrows Y^*$ визначимо верхню $[A(y),\omega]_+ = \sup\limits_{d\in A(y)} \langle d, w\rangle_Y$ і нижню $[A(y),\omega]_- = \inf\limits_{d\in A(y)} \langle d, w\rangle_Y$ опорні функції, де $y,\omega \in Y$ а також верхню $\|A(y)\|_+ = \sup\limits_{d\in \mathcal{A}(y)} \|d\|_{Y^*}$ і нижню $\|A(y)\|_- = \inf\limits_{d\in \mathcal{A}(y)} \|d\|_{Y^*}$ норми. Розглянемо зв'язані з A відображення $\mathrm{co}\, A\colon Y \rightrightarrows Y^*$ та $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A\colon Y \rightrightarrows Y^*$, визначені співвідношеннями $(\mathrm{co}\, A)(y) = \mathrm{co}(A(y))$ та $(\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y)) = \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}(A(y))$ відповідно, де $\underline{*}$ — $*$-слабке замикання в Y^*. Опорні функції мають ряд властивостей [1].

Означення 1. Позначимо через $C_v(Y)$ сім'ю всіх непорожніх замкнених опуклих обмежених підмножин з простору Y.

Означення 2. Багатозначне відображення $A\colon Y \to 2^{Y^*}$ називається:

$+$ $(-)$-коерцитивним, якщо існує дійсна функція $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, обмежена знизу на обмежених в $\mathbb{R}_+$ множинах така, що $\gamma(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$ та

$$[A(y), y]_{+(-)} \geqslant \gamma(\|y\|_Y)\|y\|_Y \qquad \forall y \in Y;$$

радіально напівнеперервним знизу (р. н. н. зн.), якщо $\forall y,\ \xi \in Y$

$$\varliminf_{t\to+0} [A(y+t\xi), \xi]_+ \geqslant [A(y), \xi]_-;$$

оператором з напівобмеженою варіацією на W (з (Y,W)-н. о. в.), якщо $\forall R \geqslant 0$ $\forall y_1,\ y_2 \in Y\colon \|y_1\|_Y \leqslant R,\ \|y_2\|_Y \leqslant R$ виконується нерівність

$$[A(y_1), y_1 - y_2]_- \geqslant [A(y_2), y_1 - y_2]_+ - C(R; \|y_1 - y_2\|'_W);$$

оператором з N-напівобмеженою варіацією на W (з N-н. о. в. на W), якщо $\forall R \geqslant 0$ $\forall y_1$, $y_2 \in Y\colon \|y_1\|_Y \leqslant R,\ \|y_2\|_Y \leqslant R$ виконується нерівність

$$[A(y_1), y_1 - y_2]_- \geqslant [A(y_2), y_1 - y_2]_- - C(R; \|y_1 - y_2\|'_W);$$

λ_0-псевдомонотонним на W (w_{λ_0}-псевдомонотонним), якщо для будь-якої послідовності $\{y_n\}_{n\geqslant 0} \subset W$ такої, що $y_n \rightharpoonup y_0$ в W, $d_n \rightharpoonup d_0$ в Y^* при $n \to +\infty$, де $d_n \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y_n)$ $\forall n \geqslant 1$, із нерівності

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - y_0\rangle_Y \leqslant 0 \tag{2}$$

випливає існування таких підпослідовностей $\{y_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ з $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$ та $\{d_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ з $\{d_n\}_{n\geqslant 1}$, для яких виконується

$$\varliminf_{k\to\infty} \langle d_{n_k}, y_{n_k} - w\rangle_Y \geqslant [A(y_0), y_0 - w]_- \qquad \forall w \in Y. \tag{3}$$

Означення 3. Багатозначне відображення $A\colon X \rightrightarrows X^*$ задовольняє умову (H), якщо для довільних $y \in X$, $n \geqslant 1$, $\{d_i\}_{i=1}^n \subset A(y)$ та $E_j \subset S$, $j = \overline{1,n}$: $\forall j = \overline{1,n}$ E_j — вимірна, $\bigcup\limits_{j=1}^n E_j = S$, $E_i \bigcap E_j = \varnothing$ $\forall i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$, елемент $d(\cdot) = \sum\limits_{j=1}^n d_j(\cdot)\chi_{E_j}(\cdot) \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y)$, де $\chi_{E_j}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in E_j, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$

Достатньою умовою для (H) є така:

$$(y \in X,\ d \in X^*,\ d(t) \in (Ay)(t) \text{ для м.в. } t \in S) \Rightarrow (d \in A(y)).$$

Метод сингулярних збурень. Розглянемо, взагалі кажучи, багатозначне двоїсте відображення

$$J(y) = \{\xi \in X^* | \langle \xi, y\rangle_X = \|\xi\|^2_{X^*} = \|y\|^2_X\} \in C_v(X^*) \qquad \forall y \in X.$$

Внаслідок [8, теорема 4, с. 202 та твердження 8, с. 203] для довільного $f \in X^*$ відображення

$$J^{-1}(f) = \{y \in X \mid f \in J(y)\} = \{y \in X \mid \langle f, y\rangle_X = \|f\|^2_{X^*} = \|y\|^2_X\} \in C_v(X)$$

також визначене на всьому просторі X і є максимально монотонним багатозначним відображенням.

Будемо апроксимувати включення з (1) таким:

$$-\varepsilon \frac{d}{dt} J^{-1}\left(\frac{d^2}{dt^2} y_\varepsilon\right) + \frac{d^2}{dt^2} y_\varepsilon + A\left(\frac{d}{dt} y_\varepsilon\right) + B(y_\varepsilon) + C(y_\varepsilon) \ni f. \tag{4}$$

Означення 4. Будемо казати, що $y \in X$ з $\dfrac{d}{dt} y \in W$ — розв'язок задачі (1) отримано методом сингулярних збурень, якщо $\left\{y, \dfrac{d}{dt} y\right\}$ — слабка границя деякої підпослідовності $\left\{y_{\varepsilon_{n_k}}, \dfrac{d}{dt} y_{\varepsilon_{n_k}}\right\}_{k \geqslant 1}$ послідовності $\left\{y_{\varepsilon_n}, \dfrac{d}{dt} y_{\varepsilon_n}\right\}_{n \geqslant 1}$ ($\varepsilon_n \searrow 0+$ при $n \to \infty$) у просторі $X \times W$ такої, що для кожного $n \geqslant 1$ $y_{\varepsilon_n} \in X$ з $\dfrac{d}{dt} y_{\varepsilon_n} \in W$ — розв'язок задачі (4).

Теорема 1. *Нехай $\lambda_A \geqslant 0$ — фіксоване, $I\colon X \to X^*$ — тотожне відображення, $p_0 = \min\{p_1, p_2\}$, простір V компактно вкладений у банахів простір V_0 і вкладення $V_0 \subset V^*$ неперервне. Припустимо, що $A + \lambda_A I\colon X \to C_v(X^*)$ — $+$-коерцитивний, р. н. н. зн. багатозначний оператор Вольтерра з $(X; W)$-н. о. в. з $\|\cdot\|'_W = \|\cdot\|_{L_{p_0}(S;V_0)}$, який задовольняє умову (H); $B\colon Y \to C_v(Y^*)$ — багатозначний оператор Вольтерра, який задовольняє умову (H), умову росту:*

$$\exists\, c_1, c_2 \geqslant 0\colon \|By\|_+ \leqslant c_1 \|y\|_Y + c_2 \qquad \forall\, y \in Y, \tag{5}$$

та умову неперервності:

$$d_H(B(z), B(z_0)) \to 0, \quad \text{якщо} \quad z \to z_0, \tag{6}$$

де $d_H(\cdot;\cdot)$ — метрика Хаусдорфа в $C_v(Y^*)$, тобто

$$d_H(C; D) = \max\{\mathrm{dist}(C; D), \mathrm{dist}(D, C)\}, \qquad \mathrm{dist}(C; D) = \sup_{c \in C} \inf_{d \in D} \|c - d\|_{Y^*},$$

$$C, D \in C_v(Y^*);$$

$C\colon X \to X^*$ — оператор з такою властивістю:

$$(Cu)(t) = C_0 u(t) \qquad \forall u \in X, \qquad \forall t \in S,$$

де $C_0\colon V_2 \to V_2^*$ — лінійний, обмежений, самоспряжений, монотонний оператор.

Тоді для довільних $a_0 \in V$ та $f \in X^*$ існує принаймні один розв'язок задачі (1) $y \in X$, *отриманий методом сингулярних збурень, причому* $y' \in W$.

Зауваження 1. Теорема 1 доводиться по аналогії з [9] шляхом зведення включення II порядку з (1) до включення I порядку.

Приклад. Нехай Ω з $\mathbb{R}^n$ — обмежена область з регулярною границею $\partial\Omega$, $S = [0; T]$, $Q = \Omega \times S$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times S$, $p = p_1 = p_2$, $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що задовольняє умову росту [10]:

$$\text{для деяких } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \qquad |\Phi(t)| \leqslant c_1|t| + c_2 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

та знакову умову:

$$\exists c_3 > 0\colon (\Phi(t) - \Phi(s))(t - s) \geqslant -c_3(s - t)^2 \qquad \forall\, t, s \in \mathbb{R}; \tag{8}$$

$S \times \mathbb{R} \ni (t, y) \to \theta_i(t, y) \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, 2$, — однозначні неперервні функції, які задовольняють таку умову:

$$\exists c_1, c_2 \geqslant 0\colon\ -c_2(1 + |x|) \leqslant \theta_1(t, x) \leqslant \theta_2(t, x) \leqslant c_1(1 + |x|) \qquad \forall\, t \in S, x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Для довільного $f \in X^* = L_2(S; L_2(\Omega)) + L_q(S; W^{-1,q}(\Omega))$ розглянемо задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x_i \partial t}\right|^{p-2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x_i \partial t}\right) + \left|\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|^{p-2} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \Phi\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right) - \\ &\qquad - \Delta y(x,t) + [\theta_1(t, y(x,t)); \theta_2(t, y(x,t))] \ni f(x,t) \quad \text{м. с. на } Q, \end{aligned} \tag{10}$$

$$y(x, 0) = 0, \qquad \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \quad \text{м. с. на} \quad \Omega,$$
$$y(x,t) = 0 \quad \text{м. с. на } \partial\Omega.$$

Як оператор $A\colon L_p(S; W_0^{1,p}(\Omega)) \bigcap L_2(\Omega) \to L_q(S; W^{-1,q}(\Omega)) + L_2(\Omega)$ візьмемо $(Au)(t) = A(u(t))$ [9], де

$$A(\varphi) = A_1(\varphi) + A_2(\varphi) \qquad \forall \varphi \in C_0^2(\overline{\Omega}),$$
$$A_1(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) + |\varphi|^{p-2}\varphi, \qquad A_2(\varphi) = \Phi(\varphi),$$

як оператор $B\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ візьмемо

$$B(u) = \{v \in L_2(Q) \mid \theta_1(t, u(x,t)) \leqslant v(x,t) \leqslant \theta_2(t, u(x,t)) \text{ для м. в. } (x,t) \in Q\},$$

а як оператор $C\colon L_2(S; H_0^1(\Omega)) \to L_2(S; H^{-1}(\Omega))$ візьмемо оператор з властивістю

$$(Cu)(t) = C_0 u(t), \qquad C_0(v) = -\Delta v, \qquad v \in H_0^1(\Omega).$$

Покладемо $H = L_2(\Omega)$, $V_1 = V_2 = V = W_0^{1,p}(\Omega) \bigcap L_2(\Omega)$ і розглянемо

$$X = L_p(S; V) \bigcap L_2(S; H), \qquad X^* = L_q(S; V^*) + L_2(S; H),$$
$$Y = L_2(S; H) = L_2(Q).$$

Тоді задача (10) має розв'язок $y \in X$, $y' \in C(S; H)$, $y'' \in X^*$, одержаний методом сингулярних збурень.

1. *Згуровский М. З., Мельник В. С., Новиков А. Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – Киев: Наук. думка, 2004. – 590 с.
2. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 324 с.
3. *Касьянов П. О.* Метод Фаедо–Гальоркіна для одного класу диференціально-операторних включень // Доп. НАН України. – 2005. – № 9. – С. 20–24.
4. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* Метод Фаедо–Гальоркіна для диференціально-операторних включень в банахових просторах з відображеннями w_{λ_0}-псевдомонотонного типу // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 1. – С. 103–126.
5. *Мельник В. С.* Топологические методы в теории операторных включений в банаховых пространствах // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 2. – С. 184–194; № 4. – С. 573–595.
6. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 337 с.
7. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 587 с.
8. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. – Москва: Мир, 1988. – 512 с.
9. *Задоянчук Н. В., Касьянов П. О.* Метод Фаедо–Гальоркіна для нелінійних еволюційних рівнянь II порядку з операторами Вольтерра // Нелінійні коливання. – 2007. – № 2. – С. 204–228.
10. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 393 с.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 06.06.2007

УДК 517.95

О. Є. Коркуна, С. П. Лавренюк

Мішана задача для одного нелінійного рівняння типу Ейдельмана в необмеженій області

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

We consider a boundary-value problem for the equation

$$u_t + \sum_{i,j=1}^{k} (a_{ij}(z,t)|u_{x_ix_j}|^{p-2}u_{x_ix_j})_{x_ix_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(z,t)u_{z_i})_{z_j} + c(z,t)|u|^{r-2}u = f(z,t).$$

The conditions of the existence and uniqueness of a generalized solution without any restriction at infinity are obtained.

У 1960 р. С. Д. Ейдельман [1] розглянув узагальнення параболічних за Петровським систем, ввівши термін “$2\vec{b}$ — параболічні системи”. У цих системах диференціюванню за різними просторовими змінними надають різної ваги по відношенню до диференціювання за змінною t. З того часу було достатньо повно розроблено теорію задачі Коші для лінійних систем вказаного типу (див. [2–12]).

Мета цієї роботи — дослідити задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння з похідною першого порядку за часовою змінною, в якому за групою просторових змінних