

М. П. Плахтієнко

## Періодичні функції на замкнених траєкторіях з групою симетрій $L_4PC$

*(Представлено академіком НАН України Ю. О. Митропольським)*

*The multitude of periodic functions, which is determined by the motion of a point on closed symmetric flat curves of the one-parametric family is constructed. These functions are obtained by the calculation of Cartesian coordinates of the point as functions of the arc length of a line. The  $2\pi$ -periodic functions which differ from classical ones by the sign of curvature at every point of their existence are discovered.*

**1. Геометрична симетрія** часто зустрічається в об'єктах неживої і живої природи. В хімії та мінералогії симетрія відображається геометричною конфігурацією молекул та кристалів [1, 2]. Явище філотаксису, дзеркальної та радіальної симетрії є предметом моделювання розвитку живих об'єктів із застосуванням сучасних математичних методів [3, 4]. Особливі прояви симетрії спостерігаються в множині елементарних частинок атомного ядра, кожна з яких має свій антисиметричний об'єкт — античастинку [5]. Періодичні рухи матеріальних систем також можуть бути прикладом динамічної симетрії, де враховується час як координата події. Теорія періодичних та квазіперіодичних рухів є найбільш розробленою в сучасному динамічному аналізі коливальних та небесно-механічних систем [6–11]. Конструктивним апаратом дослідження циклічних рухів фізико- та небесно-механічних об'єктів є колові та сферичні функції. Проте об'єкти і процеси земної механіки потребують застосування також періодичних функцій неколової природи. Це перш за все об'єкти мінералогії, житлового і промислового будівництва. Значною мірою це стосується спеціальних об'єктів машинобудування, створюваних за технологіями типу “Стелс”, зовнішня поверхня яких з метою непомітності для радарів є плоско-ребристою. Для моделювання поверхонь таких об'єктів можуть стати в нагоді недиференційовані періодичні функції, задані на негладких замкнених лініях, якими є многокутники. Адекватне моделювання процесів руху віброударних систем досягається також із застосуванням періодичних функцій неколової природи [12, 13].

В пропонованій роботі побудована множина періодичних функцій, що визначаються однопараметричною множиною симетричних з групою  $L_4PC$  замкнених траєкторій руху точки на площині. При одиничному значенні параметра множини існує єдина траєкторія у формі ромбоквадрата, яка породжує функції мінімального періоду бажаної структури для застосування в будівельній архітектурі, спеціальному машинобудуванні та кристалографії [12, 13].

**2. Спосіб зображення руху точки по замкненій симетричній траєкторії.** Розглянемо на площині множину замкнених ліній, що задаються рівнянням

$$|x|^p + |y|^p = 1, \tag{1}$$

де  $p$  — дійсне число,  $0 < p < \infty$ . Звідси видно, що  $|x|, |y| \leq 1$ . Рівняння (1) не змінюється від заміни  $x$  на  $\pm y$ . На рис. 1 зображені замкнені криві (1) для п'яти різних значень па-

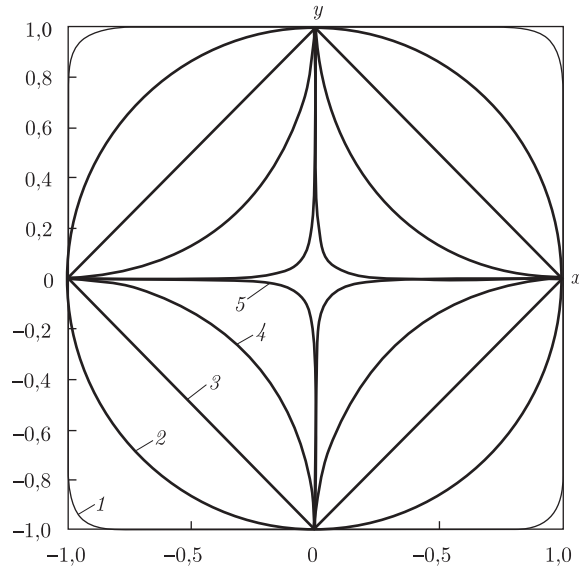


Рис. 1. Закриті лінії групи симетрій  $L_4PC$ :  
 1 — квадрaгл; 2 — коло; 3 — ромбоквaдрaт; 4 — антиколо; 5 — антиквaдрaгл

раметра  $p$ . Лініями симетрії цих кривих є осі  $Ox$ ,  $Oy$  декартової системи координат  $Oxy$  та лінії  $y = \pm x$ , які є ізогональними для множини кривих (1). Отже, лінії (1) дійсно належать до класу симетрії з групою  $L_4PC$ . При  $p = 2$  рівняння (1) описує одиничне коло, яке належить класу симетрії порядку  $L_\infty$ . Вся множина кривих (1) розділяється лінією при  $p = 1$  (ромбоквaдрaтом) на дві підмножини: екстраромбічні при  $p > 1$  та інтроромбічні при  $p < 1$ . Вони відрізняються характером орієнтації їх дотичних при обході кривих проти годинникової стрілки. У першому випадку ці дотичні повертаються на один оберт *проти* годинникової стрілки, а в другому — *за* годинниковою стрілкою. Як наслідок, різка відмінність кута  $\alpha = \arctg(dy/dx)$  нахилу дотичних до кривих множини (1). Для  $p > 1$  маємо  $\alpha = \pi/2$  при  $x = \pm 1$  і  $\alpha = 0$  при  $x = 0$ . Подібну орієнтацію дотичних має коло. При  $p \gg 1$  ці лінії за формою наближаються до квадрата зі згладженими кутами та з периметром  $P \approx 8$ , яку назвемо “квaдрaгл”. Для  $p < 1$ , навпаки,  $\alpha = 0$ , коли  $x = \pm 1$  і  $\alpha = \pi/2$  при  $x = 0$ . Для малих значень параметра  $p \ll 1$  форма ліній прямує до загостреної астроїди з периметром як у “квaдрaглa”:  $P \approx 8$ . Цю лінію назвемо “антиквaдрaгл”. Лінія 4 ( $p \approx 0,5615$ ) має довжину, рівну  $2\pi$ , назвемо її “антиколо”. При  $p = 1$  маємо ромбоквaдрaт, а при  $p = 2$  — коло.

Оскільки точка на лініях (1) площини  $Oxy$  має один ступінь свободи, як узагальнену координату виберемо довжину дуги (шляху)  $\sigma$ , що проходить точка в напрямку проти руху годинникової стрілки. Початок відліку довжини шляху виберемо в точці  $y = 0, x = 1$ . При проходженні траєкторій (1) за стрілкою годинника параметр  $\sigma$  будемо вважати від’ємним. Обчислимо довжину замкнених ліній (1). При одиничній швидкості руху довжина цих ліній визначає період обертання точки по замкненій траєкторії. Тому шукану довжину будемо позначати через  $T = T(p)$  і обчислимо її як контурний інтеграл за лінією (1)

$$T = \oint d\sigma, \quad d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Беручи до уваги симетрію замкнених ліній, маємо

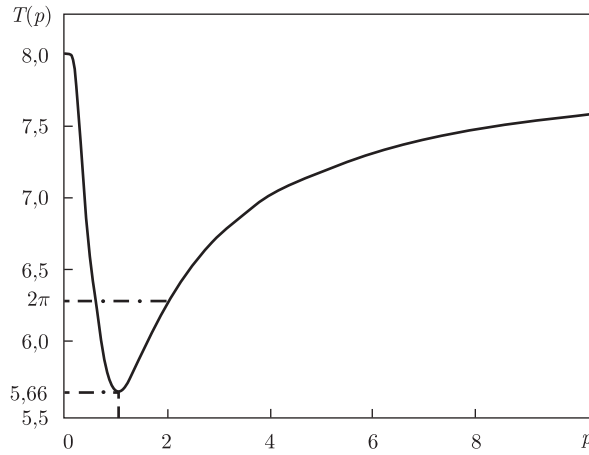


Рис. 2. Графік залежності  $T(p)$

$$T = T(p) = 4 \int_0^1 K(x, p) dx, \quad (2)$$

$$K(x, p) = \frac{d\sigma}{dx} = \sqrt{[(1 - |x|^p)^{1/p-1}|x|^{p-1}]^2 + 1}.$$

При  $p = 1$  знаходимо  $T(1) = 4\sqrt{2}$ . Для всіх  $p \neq 1$  інтеграл (2) не є власним. При  $p > 1$ ,  $x = \pm 1$  ( $p < 1, x = 0$ ) підінтегральна функція має розрив другого роду. Коли  $p = 2$ , інтеграл (2) обчислюється у формі трансцендентного числа  $T(2) = 2\pi$ , що відповідає довжині кола одиничного радіуса. В усіх інших випадках інтеграл формули (2) може бути вирахований числовим способом.

Для отримання високоточних результатів необхідно виключити точки розриву з інтервалу інтегрування. Скористаємося симетричністю ліній (1) відносно прямої  $y = x$ . Ця пряма ділить дуги траєкторій (1) в першому і третьому квадранті на рівновеликі дуги в точках, що мають абсциси  $x = \pm x^* = \pm(1/2)^{1/p} = y^*$ . Отже, при  $p > 1$  маємо  $T(p) = 8 \int_0^{x^*} K(u, p) du$ ,

а при  $p \leq 1$  —  $T(p) = 8 \int_{x^*}^1 K(u, p) du$ .

З рис. 1 неважко переконатись, що мають місце граничні співвідношення  $\lim_{p \rightarrow \infty} T(p) = \lim_{p \rightarrow +0} T(p) = 8$ .

На рис. 2 наведено графік лінії  $T(p)$ , що має асимптоту  $T = 8$  і точку мінімуму, де  $\left. \frac{dT}{dp} \right|_{p=4\sqrt{2}} = 0$ . Усі лінії, паралельні осі абсцис цього графіка при  $8 > T > 4\sqrt{2}$ , перетинають криву  $T(p)$  у двох точках, які будемо називати еквіперіодними. Еквіперіодним точкам відповідають замкнені лінії (1) однакової довжини. Координати  $y_p = y(\sigma, p)$ ,  $x_p = x(\sigma, p)$ , обчислені як функції довжини траєкторії (1), позначимо через  $y_p(\sigma) = \text{sip}(\sigma)$ ,  $x_p(\sigma) = \text{cosip}(\sigma)$ . При русі точки по лініях (1)  $\sigma = \sigma(t)$ , де  $t$  — параметр часу. Отже, ці функції є періодичними з періодом  $T_p = T(p)$

$$\text{sip}(\sigma) = \text{sip}(\sigma + T_p), \quad \text{cosip}(\sigma) = \text{cosip}(\sigma + T_p).$$

Будемо називати їх  $p$ -гармоніками. Вводимо також функцію  $p$ -тангенса  $\text{tap}(\sigma) = \text{sip}(\sigma)/\text{cosip}(\sigma)$ . Ця функція має період  $T_p/2$ , тобто  $\text{tap}(\sigma) = \text{tap}(\sigma + T_p/2)$ . Побудуємо функцію  $\text{гір}(\sigma)$  за формулою

$$\text{гір}(\sigma) = \sqrt{\text{cosip}^2\sigma + \text{sip}^2\sigma},$$

що визначає віддаль поточної точки траєкторій (1) від початку координат, вона є періодичною з періодом  $T_p/4$ ,  $\text{гір}(\sigma) = \text{гір}(\sigma + T_p/4)$ , але для  $p = 2$   $\text{гір}(\sigma) \equiv 1$ . Також як і для ромбічних функцій [13], для розв'язку тригонометричних задач основне значення мають нормовані функції  $n \text{sip}(\sigma) = \text{sip}(\sigma)/\text{гір}(\sigma)$ ,  $n \text{cosip}(\sigma) = \text{cosip}(\sigma)/\text{гір}(\sigma)$ .

Для введених функцій мають місце такі функціональні тотожності:

$$|\text{sip}(\sigma)|^p + |\text{cosip}(\sigma)|^p = 1, \quad n\text{sip}^2(\sigma) + n\text{cosip}^2(\sigma) = 1.$$

Останнє співвідношення робить справедливими класичні теореми синусів і косинусів для плоских трикутників із заміною класичних синусів і косинусів на функції  $n \text{sip}(\sigma)$ ,  $n \text{cosip}(\sigma)$ . Ці функції будемо називати узагальненими тригонометричними функціями для замкнених ліній з групою симетрій  $L_4\text{PC}$ . Для функцій  $\text{sip}(\sigma)$ ,  $\text{cosip}(\sigma)$  мають місце формули для значень  $\sigma$ , що лежать в околі точок перетину траєкторій з осями декартових координат, аналогічні формулам для колових функцій. У подальшому знадобиться табл. 1.

Формули в таблиці є також наслідком симетрії ліній (1) з групою  $L_4\text{PC}$ . Аналогічні формули мають місце і для нормованих функцій

$$n\text{sip}(\sigma), \quad n\text{cosip}(\sigma).$$

**3. Спосіб обчислення функцій  $\text{sip}(\sigma)$ ,  $\text{cosip}(\sigma)$  для довільного значення параметра  $p$  без використання таблиць або нескінченних степеневих рядів. Виключення точок нерегулярності з інтервалу інтегрування.** Для побудови залежності  $x(\sigma) = \text{cosip}(\sigma)$  будемо виходити із формули поточної довжини траєкторії (1), як функції абсциси рухомої точки

$$\sigma_p = - \int_1^x K(u, p) du. \quad (3)$$

Звідси знаходимо  $\sigma_p = f(x)$ . Обертаючи функцію  $\sigma_p = f(x)$ , маємо  $x = f^{-1}(\sigma) = x(\sigma_p)$ . У першому квадранті осей  $Oxy$  функція  $\sigma_p = f(x)$  є монотонною, тому побудова залежності  $x = f^{-1}(\sigma_p)$  зводиться до побудови графіка (3) відкладанням значення  $x$  по осі ординат, а величини  $\sigma_p$  — по осі абсцис. Далі індекс  $p$  змінної  $\sigma_p$  будемо опускати. Функція  $\text{cosip}(\sigma)$  повинна будуватись як парна функція аргументу  $\sigma$   $\text{cosip}(\sigma) = \text{cosip}(-\sigma)$ . Функцію  $\text{sip}(\sigma)$  обчислюємо згідно з формулою (1)

$$y(\sigma) = \text{sip}(\sigma) = \pm(1 - |x(p)|^p)^{1/p}, \quad (4)$$

Таблиця 1

$\sigma$	$\text{sip}(\sigma)$	$\text{cosip}(\sigma)$
$\frac{T_p}{4} \mp \sigma$	$\text{cosip}(\sigma)$	$\pm \text{sip}(\sigma)$
$\frac{T_p}{2} \mp \sigma$	$\pm \text{sip}(\sigma)$	$-\text{cosip}(\sigma)$

як непарну функцію  $\sigma \operatorname{sip}(\sigma) = -\operatorname{sip}(-\sigma)$ . Цю залежність можна також обчислити за формулою типу (3), змінивши в ній інтервали інтегрування

$$\sigma = \int_0^y K(u, p) du. \quad (5)$$

Ця формула породжує залежність  $\sigma = H(y) = H(\operatorname{sip}(\sigma))$ , обертаючи яку, отримуємо  $y(\sigma) = \operatorname{sip}(\sigma) = H^{-1}(\sigma)$ .

Для отримання високоточних результатів при користуванні формулами (3), (5) треба виключати точки розриву функції  $K(u, p)$  з інтервалів інтегрування. Викладемо алгоритм такого виключення. Цей алгоритм передбачає паралельне обчислення функцій  $\operatorname{cosip}(\sigma)$ ,  $\operatorname{sip}(\sigma)$  з інтегральних співвідношень типу (3), (5) на інтервалах  $x$ ,  $y$ , що не містять точок розриву функції  $K(u, p)$  і подальшого використання рівняння в'язі (1) для інтервалів з точками розриву. За наявності групи симетрії порядку  $L_4$ ПС інтегральні формули використовуються тільки в першій чверті періоду.

Нехай  $p > 1$ , тоді з інтервалів інтегрування виключаємо точку  $x = 1$ . Відрізок функції  $x(\sigma) = \operatorname{cosip}(\sigma)$  обчислюємо за формулою

$$\sigma = \int_x^{x^*} K(u, p) du + \frac{T_p}{8}, \quad 0 \leq x \leq x^*, \quad (6)$$

що продукує значення  $\sigma$  в зсунутому інтервалі:  $T_p/8 \leq \sigma \leq T_p/4$ . Функцію  $\operatorname{sip}(\sigma) = y(\sigma)$  обчислюємо для величини  $\sigma$  в початковому інтервалі  $0 \leq \sigma \leq T_p/8$  за формулою

$$\sigma = \int_0^y K(u, p) du, \quad 0 \leq y \leq y^*. \quad (7)$$

Далі, для відтворення функцій  $x(\sigma)$ ,  $y(\sigma)$  на інтервалі першого чверть періоду маємо такі алгебраїчні формули:

$$\begin{aligned} x(\sigma) &= (1 - y(\sigma)^p)^{1/p}, & x^* \leq x(\sigma) \leq 1, \\ y(\sigma) &= (1 - x(\sigma)^p)^{1/p}, & y^* \leq y(\sigma) \leq 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Подальші побудови ґрунтуються на застосуванні мультиплікаторно-зсувних операцій [14]. Так, згідно з табл. 1 маємо

$$\operatorname{sip}\left(\sigma + \frac{T_p}{4}\right) = \operatorname{cosip}(\sigma). \quad (9)$$

Отже, згідно з формулами (6)–(8) маємо функцію  $\operatorname{sip}(\sigma)$   $0 \leq \sigma \leq T_p/2$  для першого півперіоду. Далі, використовуючи табл. 1, маємо таку інверсно-зсувну формулу:

$$\operatorname{sip}\left(\sigma + \frac{T_p}{2}\right) = -\operatorname{sip}(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{T_p}{2}. \quad (10)$$

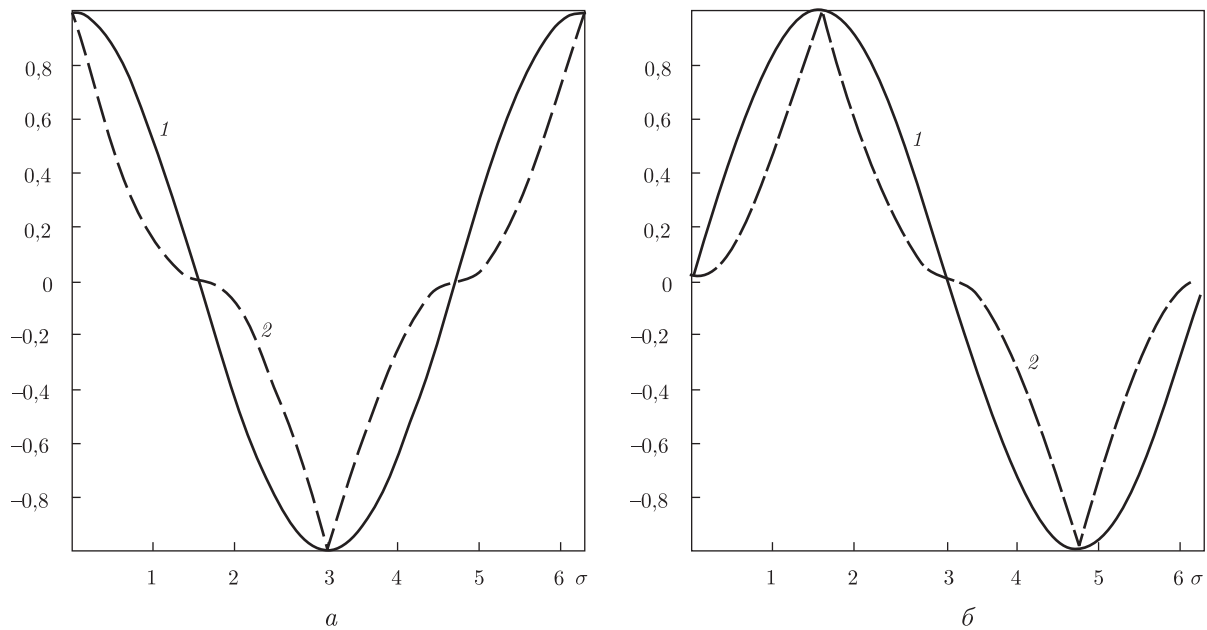


Рис. 3. Еквіперіодичні гармоніки та антигармоніки для  $T = 2\pi$ .

*a:* 1 –  $\cos \sigma$ ,  $p = 2$ ; 2 –  $\text{antcos } \sigma$ ,  $p = 0,56149$ ;

*б:* 1 –  $\sin \sigma$ ,  $p = 2$ ; 2 –  $\text{antsin } \sigma$ ,  $p = 0,56149$

Таким чином, функція  $\text{sip}(\sigma)$  стає відомою для всього періоду:  $0 \leq \sigma \leq T_p$ . Функцію  $\text{cosip}(\sigma)$  для всього інтервалу  $0 \leq \sigma \leq T_p$  можна обчислити суто алгебраїчним способом  $\text{cosip}(\sigma) = \pm(1 - |\text{sip}(\sigma)|^p)^{1/p}$ , при цьому знак (+) береться для  $0 \leq \sigma \leq T_p/4$  і  $3T_p/4 \leq \sigma \leq T_p$ ; знак (–) дійсний для  $T_p/4 < \sigma < 3T_p/4$ . Формули (6)–(10) є точними, як отримані без застосування нескінченних рядів типу Тейлора.

Аналогічні побудови з виключенням значень  $x = 0$ ,  $y = 0$  з інтервалів інтегрування мають місце при обчисленні шуканих функцій  $\text{cosip}(\sigma)$ ,  $\text{sip}(\sigma)$  при  $p < 1$ . Відмінність полягає лише в обчисленні інтегралів для  $\text{cosip}(\sigma)$  у початковому  $0 \leq \sigma \leq T_p/8$  ( $x^* \leq x(\sigma) \leq 1$ ), а для  $\text{sip}(\sigma)$  ( $y^* \leq y(\sigma) \leq 1$ ) в зсунутому  $T_p/8 \leq \sigma \leq T_p/4$  інтервалах. Алгебраїчні формули (8) у цьому випадку дають значення шуканих функцій в інтервалах, що містять значення  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $0 \leq x(\sigma) \leq x^*$ ,  $0 \leq y(\sigma) \leq y^*$ . Враховуючи викладений алгоритм і використовуючи ПЕОМ, побудуємо пару еквіперіодичних функцій, що відповідають періоду  $T = 2\pi$ . Підставляючи у формулу (2)  $T(p) = 2\pi$ , знаходимо два такі корені:  $p_1 = 0,5615$ ,  $p_2 = 2$ . На рис. 3 зображені еквіперіодичні гармоніки  $\text{sip}(\sigma, p_i)$ ,  $\text{cosip}(\sigma, p_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Як бачимо, корінь  $p_2$  відповідає класичним тригонометричним функціям:  $\text{cosip}(\sigma, p_2) = \cos(\sigma)$ ,  $\text{sip}(\sigma, p_2) = \sin(\sigma)$ . Неперервні функції  $\text{cosip}(\sigma, p_1) = \text{antcos}(\sigma)$  та  $\text{sip}(\sigma, p_1) = \text{antsin}(\sigma)$  мають розривні похідні в трьох та двох точках на одному періоді їх існування. Видно також, що отримані пари періодичних функцій відрізняються знаком  $k(\sigma)$  кривизни в кожній точці їх існування.

Для подальшого використання введемо такі означення стосовно обертання дотичної (OD).

**Означення 1.** OD плоскої кривої в точці будемо називати кутову швидкість повороту її вектора дотичної в точці, яка рухається за законом  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , де  $t$  – параметр часу,  $OD = k(\sigma)d\sigma/dt$ .

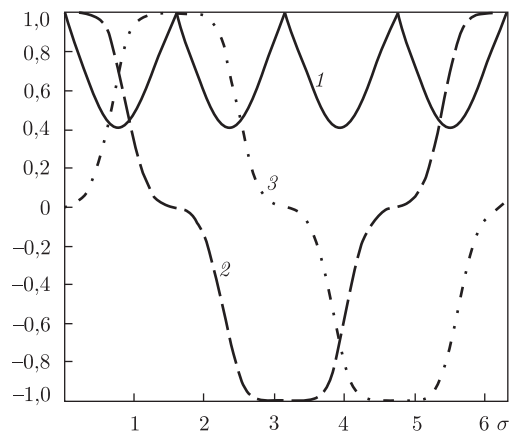


Рис. 4. Нормувальна функція  $\text{rip}(\sigma)$  та нормовані гармоніки для  $p = 0,5615$ : 1 —  $\text{rip}(\sigma)$ ; 2 —  $\text{ncos}(\sigma)$ ; 3 —  $\text{nsin}(\sigma)$

**Означення 2.** Пару періодичних функцій, однакових за періодами, областями визначення та існування, але протилежних за знаком  $OD$ , будемо називати функцією і “антифункцією”.

Отже, на підставі означень 1, 2 функції  $\text{cosip}(\sigma, p_1)$  і  $\text{sip}(\sigma, p_1)$  назвемо антикосинус ( $\text{antcos}$ ) і антисинус ( $\text{antsin}$ ) відповідно. Згідно з формулою (1) множину кривих однакової довжини при  $p > 1$  (екстраромбічні криві) і  $p < 1$  (інтратромбічні криві) можна також назвати функціями і “антифункціями”.

На рис. 4 зображені нормовані  $p$ -гармоніки

$$\text{ncos}(\sigma) = \frac{\text{antcos}(\sigma, p_1)}{\text{rip}(\sigma, p_1)}, \quad \text{nsin}(\sigma) = \frac{\text{antsin}(\sigma, p_1)}{\text{rip}(\sigma, p_1)},$$

$$\text{rip}(\sigma, p_1) = (\text{antcos}^2(\sigma, p_1) + \text{antsin}^2(\sigma, p_1))^{1/2}.$$

Як бачимо, алгебраїчна операція нормування негладких  $2\pi$ -періодичних  $p$ -гармонік функцією  $\text{rip}(\sigma, p_1)$  робить їх гладкими. Тому справедливе таке твердження.

**Твердження.** Для отримання неперервної похідної від частки або добутку двох неперервних функцій існування неперервних похідних від функції чисельника і знаменника або співмножників є умовою достатньою, але не необхідною.

Розглянемо випадок  $p = 1$ , при якому  $K(u, 1) = \sqrt{2} = q$ , і функцію  $x(\sigma) = \text{cosip}(\sigma)$  визначаємо безпосередньо з рівняння (3)

$$\sigma = -q \int_1^x du.$$

Звідси маємо

$$x(\sigma) = 1 - \frac{\sigma}{q}$$

при  $0 \leq \sigma \leq 2q$ ,  $-1 \leq x(\sigma) \leq 1$ . Тобто шукана функція визначена на півперіоді її аргументу. Далі скористаємося табл. 1  $\text{cosip}(T/2 + \sigma) = -\text{cosip}(\sigma)$  для будь-яких  $p$ . Отже, інверсія

останньої формули і перенесення значень її лінії вправо на  $2q$  дає завершальний відрізок функції на другому півперіоді

$$x(\sigma) = \operatorname{cosip}(\sigma) = \frac{\sigma}{q} - 3, \quad 2q < \sigma \leq 4q.$$

Функцію  $\operatorname{sip}(\sigma)$  обчислюємо за алгебраїчною формулою (4) при  $p = 1$ . У результаті отримуємо

$$\operatorname{sip}(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma}{q} & \text{при } 0 \leq \sigma \leq q, \\ 2 - \frac{\sigma}{q} & \text{при } q < \sigma \leq 3q, \\ \frac{\sigma}{q} - 4 & \text{при } 3q < \sigma \leq 4q. \end{cases}$$

Функції  $\operatorname{sip}(\sigma, 1) = \operatorname{sir}(\sigma)$ ,  $\operatorname{cosip}(\sigma, 1) = \operatorname{cor}(\sigma)$  з періодом  $T(1) = 4\sqrt{2}$  назвемо ромбічними, як такі, що породжені ромбоквдратом. Вони відповідають єдиному мінімуму кривої  $T(p)$  і не мають спряжених з ними еквіперіодичних “антифункцій”. На множині замкнених ліній (1) функції  $\operatorname{sir}(\sigma)$ ,  $\operatorname{cor}(\sigma)$  постають єдиними елементарними і неповторними періодичними функціями мінімального періоду. За допомогою нормованих ромбічних гармонік задачі тригонометрії на площині розв’язуються виключно алгебраїчним способом [13].

Таким чином, на визначеній множині замкнених ліній з групою симетрій  $L_4 4PC$  побудована однопараметрична система елементарних функцій з періодами  $T_p \in [4\sqrt{2}, 8)$ . Показано, що в інтервалі періодів  $8 < T_p < 4\sqrt{2}$  кожній елементарній функції відповідає “антифункція”. Функції і “антифункції” мають однакові періоди, області задання та існування, але відрізняються знаком кривизни в кожній точці їх існування. Відкриті функції “антисинус” і “антикосинус” з періодом  $2\pi$ . Доведено, що елементарні функції з періодом  $4\sqrt{2}$  не мають відповідних “антифункцій” і на визначеній множині замкнених ліній постають єдиними функціями.

1. Костов И. Кристаллография. – Москва: Мир, 1966. – 527 с.
2. Шубников А. В. Атлас кристаллографических групп симметрии. – Москва: Изд-во АН СССР, 1946. – 55 с.
3. Боднар О. Я. Геометрия филотаксиса // Доп. НАН України. – 1992. – № 9. – С. 9–14.
4. Стахов А. П., Ткаченко И. С. Гиперболическая тригонометрия // Там само. – 1993. – № 7. – С. 9–14.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Т. 3. – Москва: Физматгиз, 1963. – 702 с.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. – Москва: Физматгиз, 1963. – 410 с.
7. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. – Москва: Наука, 1964. – 431 с.
8. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 244 с.
9. Митропольский Ю. А. Нелинейная механика. Одночастотные колебания. – Киев: Ин-т математики, 1997. – 388 с.
10. Субботин М. Ф. Курс небесной механики. – Ленинград; Москва: ОГИЗ, 1941. – Т. 1. – 344 с.
11. Шарлье К. Небесная механика. – Москва: Наука, 1966. – 627 с.
12. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. – Москва: Наука, 1988. – 326 с.
13. Плахтієнко М. П. Ромбічні функції: початки теорії та прикладні задачі. – Київ, 2005. – 132 с.
14. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. – Київ: Наук. думка, 1987. – 268 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 31.05.2007