УДК 519.21

Г. М. Торбін

Про DP-властивості фрактальних ймовірнісних мір з незалежними Q-символами

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

We study continuous transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension ("DP-transformations") of every subset of $\mathbb{R}^1$. It is shown that the problem of investigation of continuous DP-transformations of the real line is equivalent to the problem of studying the DP-properties of strictly increasing probability distribution functions on a unit interval. Applying the multilevel fractal analysis of singularly continuous probability measures with independent Q-digits, we found sharp (necessary and sufficient) conditions for the Hausdorff-Besicovitch dimension preservation under the corresponding distribution functions.

1. Перетворення F простору $\mathbb{R}^n$ (бієктивне відображення $\mathbb{R}^n$ в себе) називається перетворенням, що зберігає фрактальну розмірність на множині $L \subset \mathbb{R}^n$, якщо для будь-якої підмножини $E \subset L$ розмірності Хаусдорфа–Безиковича $\alpha_0(E)$ множини E та її образу $E' = F(E)$ співпадають: $\alpha_0(E) = \alpha_0(E')$.

Якщо $L = \mathbb{R}^n$, то F є DP-перетворенням $\mathbb{R}^n$. Нехай G_L — сім'я всіх перетворень множини L, що зберігають фрактальну розмірність на L. Легко бачити, що G_L утворюють групу. З того, що $L \subset M$ випливає, що $G_L \supset G_M$. Теоретико-груповий підхід до геометрії добре відомий з часів Ерлангенської програми Ф. Клейна. Чим є "фрактальна геометрія" з цієї точки зору? В [1] запропоновано підхід до фрактальної геометрії як до галузі математики, що вивчає інваріанти групи G DP-перетворень. Дана група включає багато підгруп. Зокрема, G містить групу афінних перетворень (і тому афінна геометрія може розглядатись як частина фрактальної геометрії). В [1–3] показано, що навіть у випадку $\mathbb{R}^1$ група G має дуже багату структуру. Вона містить (як дуже частковий випадок) всі бі-Ліпшицеві перетвореннння. З іншого боку, ця група містить "суттєво негладкі" перетворення (див., зокрема, [1]). Тому інтегральне та диференціальне числення не мають відповідних інструментів для дослідження перетворень цієї групи. В [1, 2, 4] показано, що методи фрактального аналізу ймовірнісних мір дають досить потужний інструментарій для вивчення одновимірних DP-перетворень. Наступна лема може бути отримана зі зчисленної стабільності розмірності Хаусдорфа–Безиковича (див., наприклад [5]), її доведення можна знайти в [2].

Лема. *Нехай $\{D_k\}$ — скінченна або зчисленна сім'я підмножин простору $\mathbb{R}^n$, причому $\bigcup\limits_k D_k = \mathbb{R}^n$. Тоді перетворення F є DP-перетворенням $\mathbb{R}^n$ тоді і тільки тоді, коли F зберігає фрактальну розмірність на кожному з D_k.*

Наслідок. *Перетворення F є DP-перетворенням $\mathbb{R}^1$ тоді і тільки тоді, коли f зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на кожному інтервалі (a, b).*

Нехай F є перетворенням $\mathbb{R}^1$. Надалі розглядатимемо лише неперервні перетворення F. У цьому випадку F є строго монотонною функцією. Очевидно, що F є гомеоморфізмом, і, отже, зберігає топологічну структуру кожної підмножини $\mathbb{R}^1$. З наведеного вище наслідку з леми випливає, що для повного опису DP-перетворень $\mathbb{R}^1$ достатньо дослідити DP-перетворення інтервалів. Не порушуючи загальності всіх подальших міркувань, будемо розглядати одиничний відрізок. Зрозуміло, що неперервна функція F є перетворенням $[0,1]$ тоді і тільки тоді, коли вона є строго зростаючою функцією розподілу F^* на $[0,1]$ або є функцією виду $1-F^*$.

У даній статті ми досліджуємо DP-перетворення, що генеруються розподілами ймовірностей з незалежними Q-символами (див., наприклад, [4, 6]). Результати цієї роботи можуть вважатись продовженням та (в деякій мірі) завершенням досліджень, розпочатих в [1, 2, 4] для класів мір з незалежними Q-символами.

2. Нехай $N^0_{s-1} = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ для деякого $s > 1$, $s \in N$, і $Q = (q_0, q_1, \ldots, q_{s-1})$ — стохастичний вектор з додатними координатами. Використовуючи вектор Q, визначимо Q-розбиття одиничного відрізка $[0,1]$ наступним чином.

I крок. Розіб'ємо $[0,1]$ зліва направо на s відрізків Δ^Q_0, Δ^Q_1, …, Δ^Q_{s-1}, де $|\Delta^Q_i| = q_i$. $\Delta^{Q^*}_i$ називаються "відрізками (циліндрами) першого рангу".

II крок. Розіб'ємо зліва направо кожен з відрізків першого рангу $\Delta^Q_{i_1}$ на s відрізків, які називаються відрізками другого рангу. При цьому довжини відрізків другого рангу задовольняють наступне співвідношення: $q_0 : q_1 : \cdots : q_{(s-1)}$.

n-й крок. Розіб'ємо зліва направо кожен з відрізків $(n-1)$-го рангу $\Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ на s відрізків n-го рангу, зберігаючи те саме співвідношення довжин: $q_0 : q_1 : \cdots : q_{(s-1)}$.

Легко бачити, що $|\Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_n}| = q_{i_1} \cdot q_{i_2} \cdot \cdots \cdot q_{i_n} \to 0$ $(n \to \infty)$, і послідовність вкладених відрізків $\Delta^Q_{i_1} \supset \Delta^Q_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset \Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \cdots$ має єдину граничну точку x.

З іншого боку, якщо точка x не є кінцевою точкою будь-якого з відрізків описаного вище розбиття, то існує єдина послідовність вкладених відрізків $\Delta^Q_{\alpha_1(x)} \supset \Delta^Q_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)} \supset \supset \cdots \supset \Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_n(x)} \supset \cdots$, що містять точку x. Символічно це запишемо так:

$$x = \Delta^Q_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}. \tag{1}$$

Вираз (1) називається Q-зображенням x. Якщо точка x є кінцем деякого відрізка з описаного вище розбиття, то вона має два Q-зображення.

Нехай $\{\eta_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, що приймають значення $0, 1, \ldots, s-1$ з ймовірностями p_{0k}, $p_{1k}, \ldots, p_{(s-1)k}$ відповідно. Величина

$$\xi = \Delta^Q_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots} \tag{2}$$

називається випадковою величиною з незалежними Q-символами. Позначимо через $\mu = \mu_\xi$ відповідну ймовірнісну міру. Її властивості залежать від стохастичного вектора $Q = (q_0, \ldots, q_{s-1})$ та матриці ймовірностей $P = \|p_{ik}\|$. Розподіл випадкової величини ξ є чистим. В [6] доведено, що розподіл ξ є дискретним тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} > 0; \tag{3}$$

абсолютно неперервним тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{s-1} \left(1 - \frac{p_{ik}}{q_i}\right)^2 \right) < \infty; \tag{4}$$

сингулярно неперервним тоді і тільки тоді, коли нескінченний добуток (3) та ряд (4) розбігаються.

Фрактальні властивості топологічного (тобто мінімального замкненого) носія S_μ та фрактальні властивості самої міри μ вивчались в [7]. Зокрема, показано, що розмірність Хаусдорфа $\dim_H \mu$ (тобто, інфімум розмірностей Хаусдорфа–Безиковича всіх можливих борелівських носіїв міри μ) дорівнює

$$\dim_H \mu = \varliminf_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}, \tag{5}$$

де $h_k = -\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_{ik} \ln p_{ik}$, і $b_k = -\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_{ik} \ln q_i$.

3. Очевидно, що довільне DP-перетворення одиничного відрізка є строго монотонним, що у нашому випадку рівносильно відсутності нулів у матриці ймовірностей $P = \|p_{ik}\|$. Умови належності F_μ до DP-класу для випадку спеціальних обмежень на матриці Q та P $\left(q_i = \dfrac{1}{s}\right.$ і $\left.\inf\limits_{ik} p_{ik} > 0\right)$ були знайдені в [1]. В [4] результати роботи [1] були поширені на більш загальну модель (без обмежень на матрицю Q). Однак умова $\inf\limits_{ik} p_{ik} > 0$ відігравала досить важливу роль.

Головна мета даної роботи — знайти загальні необхідні і достатні умови належності F_μ до класу DP-перетворень без жодних обмежень на матриці P і Q.

Нехай $p_j = \min\limits_i p_{ij}$, $q_{\min} = \min\limits_i q_i$, $q_{\max} = \max\limits_i q_i$,

$$T^{(1)} = \left\{k\colon k \in \mathbb{N},\ p_k < \frac{1}{2} q_{\min}\right\}, \qquad T_k^{(1)} = T^{(1)} \bigcap \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Покладемо

$$A := \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{j\in T_k^{(1)}} \ln \dfrac{1}{p_j}}{k}.$$

Теорема. *Функція розподілу F_μ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича будь-якої підмножини одиничного відрізка тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{cases} \dim_H \mu = 1; \\ A = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Доведення. Достатність. Нехай $\dim_H \mu = 1$ і $A = 0$. Неважко показати (див., наприклад, [4]), що

$$h_k = -\ln(p_{0k}^{p_{0k}} \cdot p_{1k}^{p_{1k}} \cdot \cdots \cdot p_{(s-1)k}^{p_{(s-1)k}}) \leqslant b_k = -\ln(q_0^{p_{0k}} \cdot q_1^{p_{1k}} \cdot \cdots \cdot q_{s-1}^{p_{(s-1)k}}), \tag{7}$$

Отже, з (5) випливає, що умова $\dim_H \mu = 1$ рівносильна існуванню наступної границі:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = 1. \tag{8}$$

Нехай ε — довільне додатне число, таке, що $\varepsilon < (1/2)q_{\min}$. Розглянемо наступні множини:

$$T_{\varepsilon,k}^{+} = \{j\colon j \in N,\ j \leqslant k,\ |p_{ij} - q_i| \leqslant \varepsilon,\ \forall i \in N_{s-1}^{0}\}, \qquad T_{\varepsilon,k}^{-} = \{1, 2, \ldots, k\} \setminus T_{\varepsilon,k}^{+}.$$

В роботі [4] доведено, що з умови $\dim_H \mu = 1$ випливає рівність $\lim\limits_{k\to\infty} |T^+_{\varepsilon,k}|/k = 1$, де $|E|$ означає кількість елементів в множині E.

Множина $T^-_{\varepsilon,k}$ може бути представлена наступним чином: $T^-_{\varepsilon,k} = T^{(1)}_k \bigcup T_{\varepsilon,k}$, де $T^{(1)}_k$ визначені вище і $T_{\varepsilon,k} = T^-_{\varepsilon,k} \setminus T^{(1)}_k$. Очевидно, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|T^-_{\varepsilon,k}|}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|T^{(1)}_k|}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|T_{\varepsilon,k}|}{k} = 0.$$

Нехай $\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)}$ — циліндри Q-зображення, що містять точку x, $\mu = \mu_\xi$ і λ — міра Лебега. Тоді для будь-яких $x \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$ і $\varepsilon < (1/2)q_{\min}$ маємо:

$$-\ln \mu(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)}) = -\left(\ln\left[\prod_{j=1}^{k} p_{\alpha_j(x)j}\right]\right) =$$

$$= -\left(\sum_{j\in T^{(1)}_k} \ln p_{\alpha_j(x)j} + \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}} \ln p_{\alpha_j(x)j} + \sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} \ln p_{\alpha_j(x)j}\right).$$

Нескладно показати, що

$$\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \leqslant |T_{\varepsilon,k}| \ln \frac{2}{q_{\min}}$$

і

$$\sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \leqslant \sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)} - \varepsilon} = \sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)}} + \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)} - \varepsilon}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)}} + |T^+_{\varepsilon,k}| \frac{2\varepsilon}{q_{\min}}.$$

Таким чином, для будь-яких $x \in [0,1]$ та $\varepsilon < (1/2)q_{\min}$ маємо:

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln \mu(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})} \leqslant 1 + \frac{2\varepsilon}{q_{\min} \ln \dfrac{1}{q_{\max}}}.$$

З іншого боку:

$$\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \geqslant |T_{\varepsilon,k}| \ln \frac{2}{2 - q_{\min}}$$

і

$$\sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \geqslant \sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)} + \varepsilon} \geqslant \sum_{j\in T^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)}} - |T^+_{\varepsilon,k}| \frac{2\varepsilon}{q_{\min}}.$$

Тому

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln\mu(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln\lambda(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})} \geqslant 1 - \frac{2\varepsilon}{q_{\min}\ln\dfrac{1}{q_{\min}}}$$

і, отже, $\forall x \in [0,1]$, $\forall\varepsilon < (1/2)q_{\min}$:

$$1 - \frac{2\varepsilon}{q_{\min}\ln\dfrac{1}{q_{\min}}} \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln\mu(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln\lambda(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})} \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln\mu(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln\lambda(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})} \leqslant 1 + \frac{2\varepsilon}{q_{\min}\ln\dfrac{1}{q_{\max}}}.$$

Таким чином, для будь-якого $x \in [0,1]$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\mu(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln\lambda(\Delta^Q_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})} = 1. \tag{9}$$

З (9) та теореми Біллінгслі [8, c. 142], випливає, що $\alpha_\lambda(E) = 1\cdot\alpha_\mu(E)$ для всіх $E\subset[0,1]$, де $\alpha_\lambda(E)$ і $\alpha_\mu(E)$ — розмірності Хаусдорфа–Біллінгслі відносно мір λ і μ (див. детальніше, наприклад, в [7, 8]). З того, що $\alpha_\lambda(E) = \alpha_0(E)$ і $\alpha_\mu(E) = \alpha_0(E')$ отримуємо, що F_μ є DP-перетворенням одиничного відрізка.

Необхідність. Нехай F_μ — DP-перетворення одиничного відрізка. Покажемо, що $\dim_H\mu = 1$ і $A = 0$. Якщо $\dim_H\mu < 1$, то існує борелівський носій E міри μ такий, що $\dim_H\mu \leqslant \alpha_0(E) < 1$. Оскільки $\mu(E) = 1$, то $\alpha_0(F_\mu(E)) = 1 \neq \alpha_0(E)$, що суперечить припущенню. Таким чином, суперфрактальність міри μ є необхідною для збереження розмірності функцією F_μ.

Покажемо, що $A = 0$. Припустимо, що $A > 0$ і розглянемо множину

$$L = \Big\{x\colon x = \Delta^Q_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots};\, \alpha_k\in N^0_{s-1} \text{ if } k\notin T^{(1)};\, \alpha_k = n_k \text{ якщо } k\in T^{(1)},\ \text{де } p_{n_k k} = \min_i p_{ik}\Big\}.$$

Легко бачити, що $\lambda(L) = 0$. З іншого боку $\alpha_0(L) = 1$, оскільки $\lim\limits_{k\to\infty}|T^{(1)}_k|/k = 0$.

З $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\Big(\sum\limits_{j\in T^{(1)}_k}\ln p_j\Big)/(-k) = A$ випливає існування підпослідовності $\{k_m\}$ такої, що остання границя існує і дорівнює A. Отже, для будь-якого $x\in L$, маємо

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\ln\mu(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})}{\ln\lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})} = \lim_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{j\in T^{(1)}_{k_m}}\ln\dfrac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + \sum\limits_{j\in T_{\varepsilon,k_m}}\ln\dfrac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + \sum\limits_{j\in T^{+}_{\varepsilon,k_m}}\ln\dfrac{1}{p_{\alpha_j(x)j}}}{\sum\limits_{j=1}^{k_m}\ln\dfrac{1}{q_{\alpha_j(x)}}} =$$

$$= 1 + \lim_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{j\in T^{(1)}_{k_m}}\ln\dfrac{1}{p_{\alpha_j(x)j}}}{\sum\limits_{j=1}^{k_m}\ln\dfrac{1}{q_{\alpha_j(x)}}} = 1 + \lim_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{j\in T^{(1)}_{k_m}}\ln\dfrac{1}{p_j}}{\sum\limits_{j=1}^{k_m}\ln\dfrac{1}{q_{\alpha_j(x)}}} \geqslant 1 + \lim_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{j\in T^{(1)}_{k_m}}\ln\dfrac{1}{p_j}}{k_m\ln\dfrac{1}{q_{\min}}} = 1 + cA,$$

де $c = -1/\ln q_{\min}$.

Отже, для довільного $\delta > 0$ існує $m(\delta)$ таке, що для будь-якого $m > m(\delta)$ має місце

$$1 + cA - \delta \leqslant \frac{\ln \mu(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})}$$

для кожного $x \in L$, що еквівалентно наступній нерівності:

$$\mu(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)}) \leqslant \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})^{1+c\cdot A-\delta}.$$

Отже, для довільних $x \in L$, $\delta > 0$ та $m > m(\delta)$ маємо

$$d(\Delta'_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})^{1/(1+c\cdot A-\delta)} \leqslant d(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)}), \tag{10}$$

де $\Delta'_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)} = F_\mu(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})$ і $d(\cdot)$ — діаметр множини. Виберемо $\delta \in (0, c\cdot A)$.

З $\lambda(L) = 0$ випливає, що міра Хаусдорфа $H^1_\varepsilon(L) = 0$ для довільного додатного ε. Отже, для вибраного $\varepsilon > 0$ та вибраного $t > 0$ існує ε-покриття $\{E_i\}$ множини L Q-циліндрами рангу k_m (m залежить від ε і t) таке, що $\sum\limits_i d(E_i) < t$.

Сім'я множин $\{E'_i\} = \{F_\mu(E_i)\}$ є ε' — покриттям множини $L' = F_\mu(L)$. Очевидно, що $\varepsilon' \to 0$ одночасно з $\varepsilon \to 0$, оскільки функція F_μ є рівномірно неперервною на одиничному інтервалі. Не порушуючи загальності, будемо розглядати тільки ті E_i, що мають непорожній переріз з L. З (1) випливає, що

$$\sum_i [d(E'_i)]^{1/(1+c\cdot A-\delta)} \leqslant \sum_i d(E_i) < t.$$

Вибираючи ε і t як завгодно малими, отримаємо $H^{1/(1+c\cdot A-\delta)}_{\varepsilon'}(L') = 0$, $\forall \varepsilon' > 0$. Таким чином, $H^{1/(1+c\cdot A-\delta)}(L') = 0$, і, отже, $\alpha_0(L') \leqslant 1/(1 + c\cdot A - \delta) < 1$. Тому з того, що $A > 0$ слідує, що F_μ не належить до класу DP-перетворень. Теорема доведена.

Наслідок 1. *Якщо функція розподілу F_μ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича будь-якої підмножини одиничного відрізка, то відповідна ймовірнісна міра μ є суперфрактальною.*

Наслідок 2. *Якщо елементи матриці P відокремлені від нуля, тобто якщо $\inf\limits_{ij} p_{ij} > 0$, то функція розподілу F_μ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича будь-якої підмножини одиничного відрізка тоді і тільки тоді, коли $\dim_H \mu = 1$.*

Наслідок 3. *Будь-яка строго зростаюча абсолютно неперервна функція розподілу F_μ випадкової величини з незалежними Q-символами зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на $[0, 1]$.*

Робота частково підтримана фондом Гумбольдта та проектами DFG 436 UKR 113/78,80. Автор висловлює щиру вдячність академіку НАН України В. С. Королюку та професору Ювалу Пересу (Yuval Peres, University of California, Berkeley) за обговорення проблем, пов'язаних з DP-перетвореннями.

1. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension // Ergodic Theory Dynam. Syst. – 2004. – **24**. – P. 1–16.
2. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension. – Bonn: SFB 611 Preprint no. 123. – 2005. – 14 p.
3. *Sauer T., Yorke J.* Are the dimensions of a set and its image equal under typical smooth functions? // Ergodic Theory Dynam. Syst. – 1997. – **17**. – P. 941–956.

4. *Torbin G.* Probability distributions with independent Q-symbols and transformations preserving the Hausdorff dimension // Theory of Stoch. Proc. – 2007. – 13 (29). – P. 281–293.
5. *Falconer K. J.* Fractal geometry: mathematical foundation and applications. – Chichester: John Wiley & Sons. – 2003. – 337 p.
6. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів. – Київ: НПУ ім. Драгоманова. – 1998. – 296 с.
7. *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits // Bull. Sci. Math. – 2005. – **129**. – P. 356–367.
8. *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory II // Ill. J. Math. – 1961. – **5**. – P. 291–198.
9. *Торбін Г. М.* Мультифрактальний аналіз сингулярно неперервних імовірнісних мір // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**. – С. 837–857.

Національний педагогічний університет
ім. М. П. Драгоманова, Київ

Надійшло до редакції 26.12.2007