УДК 550.34.013

А. С. Костинский

Скорость распространения процесса в очаге как базовый параметр квазидинамических моделей: особенности алгоритма определения, по данным группы станций

(Представлено академиком НАН Украины В. И. Старостенко)

Attention is called to the process propagation velocity preferred position in the collection of parameters of focal models and the quantitative assessment significance of a reduced value $\zeta = v/c$ even for models with constant velocity $v = \text{const}$ (c is the elastic wave velocity). The scheme of determination of the ratio ζ by records of three stations logically completes the author's computational algorithm based on the time integration of a displacement with weight factors $f(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Классические очаговые модели [1–3], как заметил Б. В. Костров, неулучшаемы, если оставаться в рамках понятий, на основе которых эти модели созданы. Выход за пределы "материнского" пространства образов полевой геологии неизбежен как условие развития, и один из вариантов — взгляд на очаговую зону как на "островок" возбудимой среды [4]. Если быть последовательным, это означает сохранить только представление об очаге как о нелинейной открытой системе, далекой от термодинамического равновесия, о чем-то напоминающем нервную ткань, структурные элементы которой ("клетки") способны к возбуждению и к передаче возбуждения от одних участков к другим. Согласившись столь радикально изменить язык описания, получаем дополнительные "степени свободы" конструирования, но лишаемся ориентиров, возможности, например, оценить численные значения характерных постоянных теории. Сложность и "полифония" объекта описания оставляет в нашем распоряжении только аксиоматический метод и принципы, универсальность которых не вызывает сомнения, даже если доказательств этой универсальности не существует. По необходимости, на каком-то этапе вынужденно, превращаются в постулаты соотношения механики упругих сред и "элементы конструкции" кинематических моделей. В выражении для смещения в дальней зоне

$$U_i(\vec{r}, t) = \frac{\gamma_i \gamma_p \gamma_q \nu_k}{4\pi\rho\alpha^3} \iint\limits_{\Sigma} \frac{c_{jkpq}}{|\vec{\xi} - \vec{r}|} \frac{\partial}{\partial t} \left[U_j \left(\vec{\xi}, t - \frac{|\vec{\xi} - \vec{r}|}{\alpha} \right) \right] d\Sigma(\xi) +$$
$$+ \frac{(\delta_{ip} - \gamma_i \gamma_p) \gamma_q \nu_k}{4\pi\rho\beta^3} \iint\limits_{\Sigma} \frac{c_{jkpq}}{|\vec{\xi} - \vec{r}|} \frac{\partial}{\partial t} \left[U_j \left(\vec{\xi}, t - \frac{|\vec{\xi} - \vec{r}|}{\beta} \right) \right] d\Sigma(\xi)$$

можно увидеть "аксиому связи", определяющую значение измеряемого вектора, и ей предшествует в таком случае предположение о векторном характере поля $[\mathbf{U}(\ldots)]$, характеризующего систему. Строго говоря, все, что служит источником волн, распространяющихся в сплошной среде и регистрируемых на поверхности, может быть названо "очагом землетрясения", например, скачок производной смещения, или компоненты тензора напряжений, в точках некоторой меняющейся поверхности. Соответственно этому, поставив на место “бестелесного” скачка смещения физически бесконечно тонкий слой возбудимой среды, можно признать в некотором смысле равноправными гипотезы о трансформационных свойствах поля, описывающего слой. Но скорость распространения процесса, даже переменная в пределах слоя, всегда мысленно выделена, исключительна как параметр и обязательно уцелеет в будущем описании. Поэтому, даже если предполагается, что очаг описывается моделью почти полностью традиционной, где функция скачка смещения есть ограниченная во времени версия самоподобного решения [5]

$$\Delta U^s(\rho,t) = Kv\sqrt{t^2 - \left(\frac{\rho}{v}\right)^2} H\left(t - \frac{\rho}{v}\right)\{1 - H(\rho-\rho_0)\}, \qquad K = \mathrm{const},$$

то полученные в эксперименте значения отношения v/c (c — скорость упругих волн), могут сыграть существенную роль.

Алгоритм расчета параметров, основанный на интегрировании смещения по времени с весовыми множителями $f(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ [6], дает возможность для моделей [7, 8] измерить по записям на одной станции параметр $\gamma = v/c \sin\vartheta$, угол ϑ образован нормалью к площадке $\vec{\nu}$ и направлением из центра площадки на точку наблюдения. Пусть в измерениях на станциях C_1, C_2, C_3 получены значения $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Для скаляра $\zeta = v/c$ и единичного вектора $\vec{\nu}$ имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\zeta \sin\vartheta_k = \gamma_k, \qquad k = 1,2,3, \\ &\cos\vartheta_k = \vec{\nu}\vec{\chi}_k, \qquad 0 \leqslant \vartheta_k \leqslant \pi, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{\chi}_k$ — известные единичные вектора, задающие направления из центра площадки на станции C_k (без ограничения общности можно предполагать, что тип волны на станциях один и тот же). Координатная система произвольна, ее начало не совпадает ни с одной из станций C_1, C_2, C_3.

Будем искать решение системы (1) в соответствии со следующей схемой. Исключая вектор $\vec{\nu}$ из формулы (1), получаем уравнение для параметра ζ и ищем его положительные решения (если они существуют), удовлетворяющие условиям существования вектора:

$$\frac{1}{\zeta}\gamma_k \leqslant 1, \qquad k = 1,2,3. \tag{2}$$

Синусы углов ϑ_k определятся по системе (1), косинусы — как $\pm\sqrt{1-(\sin\vartheta_k)^2}$. Существует всего 8 косинус-троек $(\cos\vartheta_1, \cos\vartheta_2, \cos\vartheta_3)$, соответствующих синус-тройке $(\sin\vartheta_1, \sin\vartheta_2, \sin\vartheta_3)$, каждая из них однозначно определяет вектор $\vec{\nu}$ по формуле:

$$\vec{\nu} = \frac{1}{[\vec{\chi}_1\vec{\chi}_2\vec{\chi}_3]}\{\cos\vartheta_1(\vec{\chi}_2\times\vec{\chi}_3) + \cos\vartheta_2(\vec{\chi}_3\times\vec{\chi}_1) + \cos\vartheta_3(\vec{\chi}_1\times\vec{\chi}_2)\}. \tag{3}$$

Прежде чем вывести уравнение для ζ, рассмотрим в линейном (не обязательно евклидовом) векторном пространстве R_3, элементы которого есть тройки вещественных чисел (x, y, z), функцию — полином степени 2

$$\begin{aligned} &\Delta(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz - o, \\ &o \equiv [\vec{\chi}_1\vec{\chi}_2\vec{\chi}_3]^2, \end{aligned}$$

с коэффициентами

$$a_{11} = (\vec{\chi}_2 \times \vec{\chi}_3)^2, \qquad a_{22} = (\vec{\chi}_3 \times \vec{\chi}_1)^2, \qquad a_{33} = (\vec{\chi}_1 \times \vec{\chi}_2)^2,$$
$$a_{12} = (\vec{\chi}_2\vec{\chi}_3) \cdot (\vec{\chi}_3\vec{\chi}_1) - (\vec{\chi}_1\vec{\chi}_2), \qquad a_{13} = (\vec{\chi}_1\vec{\chi}_2) \cdot (\vec{\chi}_2\vec{\chi}_3) - (\vec{\chi}_1\vec{\chi}_3),$$
$$a_{23} = (\vec{\chi}_1\vec{\chi}_3) \cdot (\vec{\chi}_1\vec{\chi}_2) - (\vec{\chi}_2\vec{\chi}_3),$$

и поверхность второго порядка Φ_0, заданную уравнением $\Delta = 0$. Пусть числовая косинус-тройка $(\cos\vartheta_1, \cos\vartheta_2, \cos\vartheta_3)$ соответствует фиксированным векторам $\vec{\chi}_k$, $k = 1, 2, 3$, и одному из возможных положений вектора $\vec{\nu}$. Если ее рассматривать как 3-вектор $(x, y, z) \in \in R_3$, поверхность Φ_0 можно представить как множество всевозможных таких троек. Каждая тройка принадлежит Φ_0; легко убедиться в этом, возводя в квадрат обе части (3).

Характеристическое уравнение поверхности Φ_0

$$\lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + 3[\vec{\chi}_1\vec{\chi}_2\vec{\chi}_3]^2\lambda - [\vec{\chi}_1\vec{\chi}_2\vec{\chi}_3]^4 = 0$$

имеет три вещественных положительных корня λ_k, $k = 1, 2, 3$ (если предполагается, что смешанное произведение $[\vec{\chi}_1\vec{\chi}_2\vec{\chi}_3]$ не обращается в нуль для данной тройки станций и рассматриваемого радиус-вектора гипоцентра). Поверхность Φ_0, следовательно, есть эллипсоид с центром в начале координат (т. е. в точке $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ в R_3) и полуосями

$$l_k = \frac{|[\vec{\chi}_1\vec{\chi}_2\vec{\chi}_3]|}{\lambda_k^{1/2}}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Можно показать, не используя (3) (например, с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа), что все точки эллипсоида Φ_0 принадлежат единичному кубу C_0 с центром в нуле:

$$\Phi_0 \in C_0, \qquad C_0\colon |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1,\ |z| \leqslant 1.$$

Эллипсоид касается каждой грани куба в одной точке (например, для грани $x = 1$ это точка $(1, (\vec{\chi}_1\vec{\chi}_2), (\vec{\chi}_1\vec{\chi}_3)))$. Точки эллипсоидов Φ_k, $k = 1, 2, 3$, уравнения которых получаются из уравнения для Φ_0, если одна из координат меняет знак,

$$\Phi_1\colon \Delta(-x, y, z) = 0,$$
$$\Phi_2\colon \Delta(x, -y, z) = 0,$$
$$\Phi_3\colon \Delta(x, y, -z) = 0,$$

принадлежат этому же кубу C_0.

Далее, сконструируем поверхность Φ_c как логическую сумму множеств Φ_0 и Φ_k, $k = = 1, 2, 3$. Левая часть уравнения для Φ_c есть произведение соответствующих левых частей

$$\Phi_c\colon \Delta(x, y, z) \cdot \Delta(-x, y, z) \cdot \Delta(x, -y, z) \cdot \Delta(x, y, -z) = 0$$

и зависит только от квадратов переменных x, y, z. Этот факт делает возможным, избежав радикалов, перейти в уравнении для Φ_c к новым переменным x', y', z', связанным с x, y, z соотношениями:

$$(x')^2 = 1 - x^2, \qquad (y')^2 = 1 - y^2, \qquad (z')^2 = 1 - z^2.$$

Если 3-точка (x, y, z) пробегает Φ_c, то 3-точка (x', y', z') пробегает поверхность Φ_s в R_3, Φ_s, так же, как Φ_c, помещается в границах куба C_0. Уравнение для Φ_s может быть представлено, после группирования членов одинаковой степени, в виде

$$\sum_{k=0}^{4} A_{2k}(x'^2, y'^2, z'^2) = 0, \tag{4}$$

где формы A_{2k} имеют степень $2k$ по переменным x', y', z'. Коэффициенты форм полностью определяются тремя скалярными произведениями, косинусами $\cos\phi_{12} = (\vec{\chi}_1\vec{\chi}_2)$, $\cos\phi_{13} = (\vec{\chi}_1\vec{\chi}_3)$, $\cos\phi_{23} = (\vec{\chi}_2\vec{\chi}_3)$.

Подставляя x', y', z' из соотношений

$$x' = \frac{1}{\zeta}\cdot\gamma_1, \qquad y' = \frac{1}{\zeta}\cdot\gamma_2, \qquad z' = \frac{1}{\zeta}\cdot\gamma_3$$

в уравнение (4), получаем уравнение для $1/\zeta$, это алгебраическое уравнение 8-го (фактически 4-го) порядка

$$s_0\omega^4 + s_1\omega^3 + s_2\omega^2 + s_3\omega + s_4 = 0, \qquad \omega = \frac{1}{\zeta^2} \tag{5}$$

с коэффициентами

$$s_0 = \delta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\cdot\delta(-\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\cdot\delta(\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3)\cdot\delta(\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3),$$
$$\delta(x, y, z) = \Delta(x, y, z) + o,$$

s_1 = форма 3-й степени по переменным γ_1^2, γ_2^2, γ_3^2; s_2 = квадратичная форма по переменным γ_1^2, γ_2^2, γ_3^2; s_3 = линейная форма по переменным γ_1^2, γ_2^2, γ_3^2;

$$s_3 = 32(\sin\phi_{12})^2(\sin\phi_{13})^2 \times (\sin\phi_{23})^2(c_1\gamma_1^2 + c_2\gamma_2^2 + c_3\gamma_3^2),$$

где

$$c_1 = -(\sin\phi_{23})^2\{(\sin\phi_{12})^2 + (\sin\phi_{13})^2 - 1 + \cos\phi_{12}\cos\phi_{13}\cos\phi_{23}\},$$
$$c_2 = -(\sin\phi_{13})^2\{(\sin\phi_{12})^2 + (\sin\phi_{23})^2 - 1 + \cos\phi_{12}\cos\phi_{13}\cos\phi_{23}\},$$
$$c_3 = -(\sin\phi_{12})^2\{(\sin\phi_{13})^2 + (\sin\phi_{23})^2 - 1 + \cos\phi_{12}\cos\phi_{13}\cos\phi_{23}\},$$
$$s_4 = 16(\sin\phi_{12})^4(\sin\phi_{13})^4(\sin\phi_{23})^4.$$

Выражение для s_0 есть произведение квадратичных форм, каждая из которых при условии $o \neq 0$ имеет строго положительные главные миноры матрицы $((\sin\phi_{\dots})^2, o, o^2)$. Лидирующий коэффициент, следовательно, сохраняет знак "+" при любых значениях "наблюдаемых" переменных γ_1, γ_2, γ_3, как и коэффициент s_4. Исключительная сложность выражения для s_1 делает практически невозможным анализ многомерной поверхности $s_1 = 0$, но инварианты поверхности 2-го порядка $s_2(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2) = 0$ обозримы, и первые два инварианта

$$I = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \qquad J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

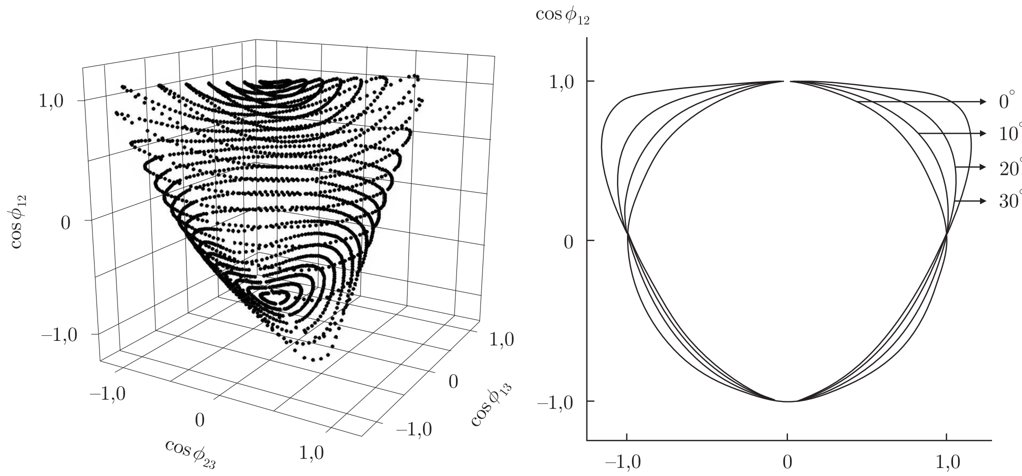

Рис. 1. Поведение инварианта I определяющей квадрики коэффициента s_2: точки трехмерной поверхности $I = 0$ в единичном кубе переменных $\cos\phi_{23}$, $\cos\phi_{13}$, $\cos\phi_{12}$ (слева), двумерные сечения плоскостью, проходящей через вертикальную ось (справа). Цифры соответствуют значению широтного угла

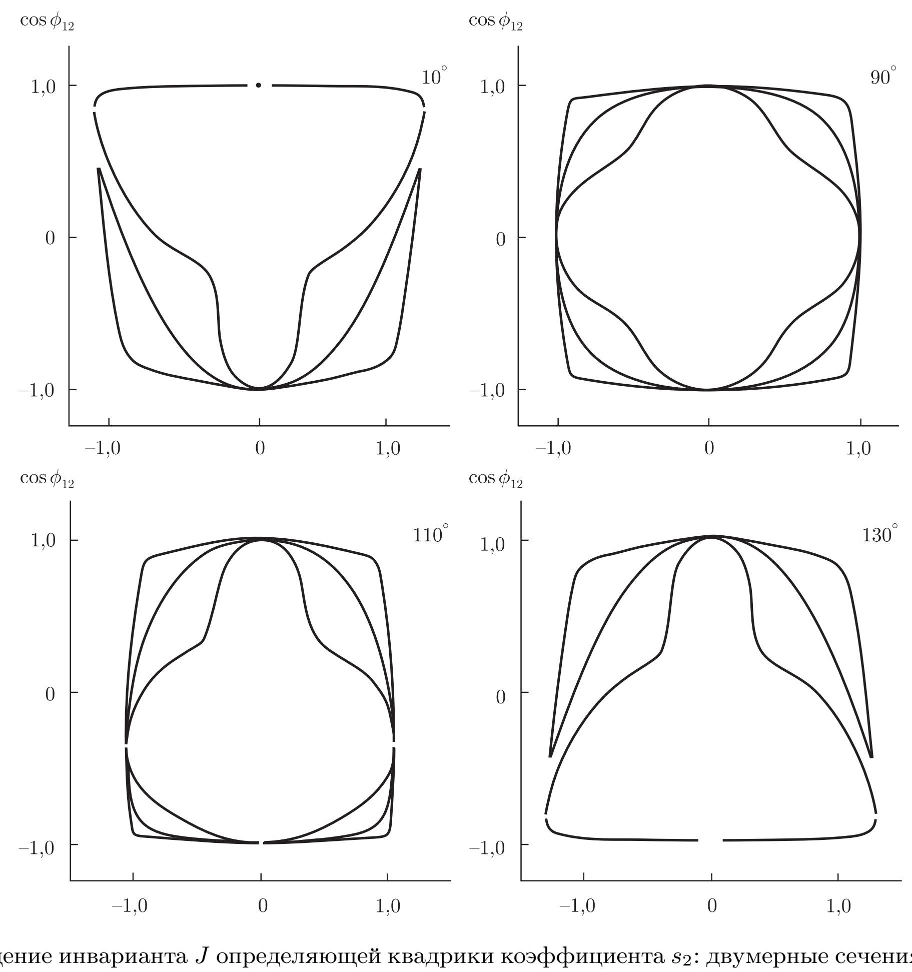

Рис. 2. Поведение инварианта J определяющей квадрики коэффициента s_2: двумерные сечения плоскостью, проходящей через вертикальную ось переменной $\cos\phi_{12}$. Цифры соответствуют значению широтного угла

как функции трех переменных $\cos\phi_{23}$, $\cos\phi_{13}$, $\cos\phi_{12}$, как выясняется, могут обращаться в нуль в пределах единичного куба (см. рис. 1, 2).

Коэффициенты c_1, c_2, c_3 линейной формы s_3 в этих пределах не только не сохраняют знак, но не могут одновременно быть ни положительными, ни отрицательными. Формы s_2 и s_3 в общем случае, следовательно, не являются знакоопределенными, число перемен знаков в системе коэффициентов уравнения (5) не отслеживается, и какое-либо заключение о числе положительных корней ω_0 на уровне теоремы Декарта невозможно.

1. *Molnar P., Tucker B. E., Brune J. N.* Corner frequencies of P- and S-waves and models of earthquake sources // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1973. – **63**. – P. 2091–2104.
2. *Sato T., Hirasawa T.* Body wave spectra from propagating shear crack // J. Phys. Earth. – 1973. – **21**. – P. 415–431.
3. *Dahlen F. A.* On the ratio of P-wave to S-wave corner frequencies for shallow earthquake sources // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1974. – **64**. – P. 1159–1180.
4. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.* Математическая биофизика. – Москва: Наука, 1984. – 304 с.
5. *Burridge R., Willis J.* The self-similar problem of the expanding elliptical crack in an anisotropic solid // Proc. Cambr. Philosoph. Soc. – 1969. – **66**. – P. 443–468.
6. *Kostinsky A. S.* A calculation of kinematic model parameters for a focus from integral characteristics of a spectrum of body waves // Доп. НАН України. – 1995. – No 5. – С. 88–90.
7. *Kostinsky A. S.* A quasi-dynamic model of focus with constant maximum value of displacement discontinuity: theoretical seismograms // Там само. – 2000. – No 7. – С. 139–142.
8. *Костинский А. С.* Очаг землетрясения как возбудимая среда: простейший пример оптимального конструирования // Там само. – 2002. – № 12. – С. 87–94.

Отдел сейсмологии Института геофизики им. С. И. Субботина НАН Украины, Симферополь

Поступило в редакцию 04.10.2007