

В. З. Грищак, О. А. Ганилова

К решению проблемы динамического деформирования пьезоэлектрических многослойных пластин на основе гибридного ВКБ-Галеркин метода

(Представлено академиком НАН Украины В. П. Шевченко)

The paper deals with the problem of the behavior of a symmetric orthotropic piezoelectric sandwich plate subjected to the dynamic normal loading $q(x, y, t)$ taking into consideration the damping coefficient variable in time. A hybrid WKB-Galerkin method is applied to solve the problem. The results obtained are compared with numerical results.

В связи с широким использованием пьезоэлектрических материалов в современных композитных структурах [1–3] особый интерес представляет рассмотрение трехслойной пьезоэлектрической пластины, находящейся в электрическом поле под действием динамической внешней нагрузки. Следует отметить, что подобного рода задача была рассмотрена в работе [4] для вязкоупругих пластин, согласно модели слоистых оболочек из вязкоупругих пьезоматериалов, описанной в [5]. Решение основного уравнения задачи проводилось методами усреднения и конечных элементов.

Обращает на себя внимание тот факт, что поведение напряженно-деформируемых пластин с интегрированными в них активаторами и сенсорами в основном рассматривается на основе метода конечных элементов [4, 6]. Поэтому особый интерес представляют исследования в этой области на основе точных и приближенных аналитических методов, позволяющие провести качественный анализ полученных решений.

При анализе реальных механических процессов возникает необходимость в интегрировании сингулярных дифференциальных уравнений, содержащих большие и малые параметры при старшей производной и не допускающих в ряде случаев точных решений. В этом случае приближенное решение поставленной задачи удобно искать в виде асимптотического решения по данному параметру.

Можно назвать ряд подходов, являющихся гибридными, которые основываются на идее построения “уточняющего” решения, полученного на основе последовательности координатных функций асимптотического разложения [7–10]. Если специальным образом определить неизвестные параметры, то “уточняющее” гибридное решение исходного уравнения хорошо согласуется с точным решением на большом интервале изменения коэффициентов уравнения. Гибридный ВКБ-Галеркин метод, подробное описание которого представлено в работах [7, 8], демонстрирует особенно хорошие результаты при отыскании приближенного решения сингулярных дифференциальных уравнений, в частности с переменными коэффициентами, содержащих параметр при старшей производной независимо от его величины.

В данной работе рассматривается трехслойная пьезоэлектрическая ортотропная пластина, находящаяся в электрическом поле под действием динамической внешней нагрузки, с учетом переменного во времени коэффициента демпфирования. Решение поставленной задачи основано на использовании гибридного ВКБ-Галеркин метода.

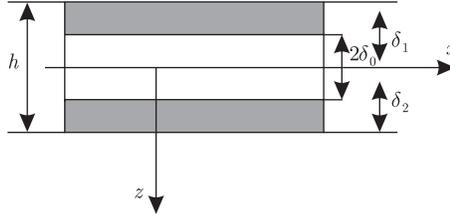


Рис. 1. Ортоотропная симметрично собранная пьезоэлектрическая пластинка

Рассмотрим прямоугольную пластинку ($a \times b$), шарнирно опертую по всему контуру. Ортоотропная пластинка симметрично собрана, относительно координатной плоскости xOy , из пьезоэлектрического материала и имеет толщину h . Приложенная нагрузка инициируется электрической составляющей $V(x, y, t)$ и механической динамической составляющей в форме

$$Z_m = q(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - 2\rho h \varepsilon(t) \frac{\partial w}{\partial t} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где

$$\rho = \sum_{k=1}^3 \frac{\rho_k h_k}{h}, \quad (2)$$

где ρ_k, h_k — плотность и толщина k -го слоя соответственно.

Для рассматриваемой пластинки (рис. 1) согласно [11] для жесткостей получим следующие выражения:

$$K_{ik} = 0, \quad C_{ik} = 2[\delta_0 B_{ik}^0 (\delta - \delta_0) B_{ik}], \quad D_{ik} = \frac{2}{3}[\delta_0^3 B_{ik}^0 + (\delta^3 - \delta_0^3) B_{ik}], \quad (3)$$

учитывая, что

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta, \quad B'_{ik} = B''_{ik} = B_{ik}. \quad (4)$$

В этом случае основные уравнения движения пластинки в рамках гипотез, описанных в [11–13], можно записать в виде [1, 14, 15]

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ik})u_0 + L_{12}(C_{ik})v_0 - L_{13}(K_{ik})w &= \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^N e_{31}^{0k} \frac{\partial V^k}{\partial x}, \\ L_{22}(C_{ik})v_0 + L_{12}(C_{ik})u_0 - L_{23}(K_{ik})w &= \rho h \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^N e_{32}^{0k} \frac{\partial V^k}{\partial y}, \\ L_{33}(D_{ik})w - L_{13}(K_{ik})u_0 - L_{23}(K_{ik})v_0 &= Z_m - \sum_{k=1}^N e_{31}^{0k} z_0^k \frac{\partial^2 V^k}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^N e_{32}^{0k} z_0^k \frac{\partial^2 V^k}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
L_{11}(C_{ik}) &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, & L_{22}(C_{ik}) &= C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\
L_{12}(C_{ik}) &= (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, & L_{13}(K_{ik}) &= K_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}, \\
L_{23}(K_{ik}) &= K_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2}, \\
L_{33}(D_{ik}) &= D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Координата срединной плоскости k -го слоя согласно [15] определена как $z_0^k = (1/2)(z_k + z_{k-1})$.

Отметим, что исходная система (5) с учетом (3) распадается на две самостоятельные подсистемы: первые два уравнения представляют собой некоторую плоскую задачу, а третья — задачу поперечного изгиба пластинки, которая нас интересует:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = Z, \tag{7}$$

где

$$Z = Z_m - \sum_{k=1}^N e_{31}^{0k} z_0^k \frac{\partial^2 V^k}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^N e_{32}^{0k} z_0^k \frac{\partial^2 V^k}{\partial y^2}.$$

Рассмотрим решение основного уравнения согласно классической теории многослойных пластин в случае, когда на пластинку действует динамическая нагрузка вида (1)

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - 2\rho h \varepsilon(t) \frac{\partial w}{\partial t} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Решение будем искать в виде

$$w(t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \tag{9}$$

Тогда, обозначив

$$\begin{aligned}
\tilde{D} &= \pi^4 \left(\frac{D_{11}}{a^4} + 2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{a^2 b^2} + \frac{D_{22}}{b^4} \right); & \tilde{\tilde{D}} &= \frac{\tilde{D}}{\rho^2 h^2}; & \tilde{q}(t) &= \frac{q(t)}{\rho^2 h^2}; \\
\tilde{\varepsilon}(t) &= \frac{\varepsilon(t)}{\rho h}; & \lambda^2 &= \frac{1}{\rho h},
\end{aligned} \tag{10}$$

уравнение (8) перепишем в виде следующего неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами:

$$\lambda^2 f''(t) + 2\tilde{\varepsilon}(t) f'(t) + \tilde{\tilde{D}} f(t) = \tilde{q}(t), \tag{11}$$

где λ^2 — параметр при старшей производной.

Решение уравнения (11) имеет вид

$$f(t) = f_c(t) + f_p(t), \quad (12)$$

где $f_c(t)$ — решение однородного уравнения и $f_p(t)$ — частное решение.

Найдем решение однородного дифференциального уравнения, полученного из уравнения (11). Согласно описанному в [7, 8] гибричному ВКБ-Галеркин методу ВКБ-приближение имеет вид

$$f(t, \lambda) = \exp \left[\int_a^t \left(\frac{1}{\lambda} f_0(t) + f_1(t) \right) dt \right]. \quad (13)$$

Подставляя (13) в однородное уравнение, получаем

$$\lambda^2 \left[\frac{1}{\lambda} f_0' + f_1' + \frac{1}{\lambda^2} f_0^2 + f_1^2 + 2 \frac{1}{\lambda} f_0 f_1 \right] + 2\bar{\varepsilon}(t) \left[\frac{1}{\lambda} f_0 + f_1 \right] + \tilde{D} = 0. \quad (14)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ , приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} f_0^2 + 2\bar{\varepsilon}(t)f_1 + \tilde{D} = 0, \\ f_0' + 2f_0f_1 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f_1 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln f_0, \\ \bar{\varepsilon}(t)f_0' - f_0^3 - \tilde{D}f_0 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Решение второго уравнения системы (15) находим, используя подстановку $f_0 = U(t)V(t)$. Таким образом, решение системы (15) имеет вид

$$\begin{cases} f_1 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln f_0, \\ f_0 = \pm i \exp \left(\tilde{D} \int \frac{dt}{\bar{\varepsilon}(t)} \right) \left[2 \int \frac{\exp \left(2\tilde{D} \int \frac{dt}{\bar{\varepsilon}(t)} \right)}{\bar{\varepsilon}(t)} dt \right]^{-1/2}. \end{cases} \quad (16)$$

На втором шаге решения согласно гибричному ВКБ-Галеркин методу исходная функция представляется в форме

$$\tilde{f}(t, \lambda) = \exp \left[\int_a^t [\delta_{01}(\lambda) + i\delta_{02}(\lambda)] f_0(t) dt \right], \quad (17)$$

где f_0 — полученная для ВКБ-решения функция (16). Тогда однородное уравнение, полученное из (11), примет вид

$$\lambda^2 [(\delta_{01} + i\delta_{02})f_0' + (\delta_{01}^2 + 2i\delta_{01}\delta_{02} - \delta_{02}^2)f_0^2] + 2\bar{\varepsilon}(t)[\delta_{01} + i\delta_{02}]f_0 + \tilde{D} = 0. \quad (18)$$

Согласно условию ортогональности

$$\int_a^b R(\delta_0, \dots, \delta_N, f_0, \dots, f_N, f_0', \dots, f_N^{(n-1)}, t, \varepsilon) f_i(t) dt = 0$$

для R и $N + 1$ координатной функции [7, 8], учитывая, что $f_0 = \pm i\bar{f}_0$, получаем

$$\int_a^b [\lambda^2 [(-\delta_{01} - i\delta_{02})\bar{f}_0' \bar{f}_0 + (-\delta_{01}^2 i + 2\delta_{01}\delta_{02} + i\delta_{02}^2)(\pm \bar{f}_0^3)] + 2\bar{\varepsilon}(t)[-\delta_{01} - i\delta_{02}]\bar{f}_0^2 + i\tilde{D}(\pm \bar{f}_0)] dt = 0. \quad (19)$$

Приравнивая коэффициенты при действительной и мнимой частях уравнения, приходим к системе

$$\begin{cases} A\delta_{02} - B\delta_{01}^2 + B\delta_{02}^2 + W = 0, \\ A\delta_{01} + 2B\delta_{01}\delta_{02} = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$A = \int_a^b [-\lambda^2 \bar{f}_0' \bar{f}_0 - 2\bar{\varepsilon}(t)\bar{f}_0^2] dt, \quad B = \int_a^b \lambda^2 \bar{f}_0^3 dt, \quad W = \int_a^b \tilde{D}\bar{f}_0 dt. \quad (21)$$

Решение системы (20) имеет вид

$$\begin{cases} \delta_{01} = \frac{\sqrt{4BW - A^2}}{2B}, \\ \delta_{02} = \mp \frac{A}{2B}. \end{cases} \quad (22)$$

Таким образом, гибридное решение однородного уравнения определяется формулой (17) с учетом (22).

Для получения частного решения уравнения (11) в качестве примера рассмотрим два случая коэффициента затухания при заданном внешнем воздействии $q(t)$:

$$\varepsilon(t) = Ct \quad \text{и} \quad \varepsilon(t) = Me^{Kt}, \quad (23)$$

где C, M, K — произвольные константы. Тогда гибридное решение (17) примет вид

$$\tilde{f}(t, \lambda) = e^{-\delta_{02}\sqrt{\tilde{D}t}} \left(c_1 \sin \delta_{01} \sqrt{\tilde{D}t} + c_2 \cos \delta_{01} \sqrt{\tilde{D}t} \right), \quad (24)$$

где c_1, c_2 — произвольные константы. Частное решение определено по методу вариации произвольных постоянных.

Согласно (12) общее решение имеет вид

$$f(t) = e^{-\delta_{02}\sqrt{\tilde{D}t}} \left((\bar{c}_1 + c_1) \sin \delta_{01} \sqrt{\tilde{D}t} + (\bar{c}_2 + c_2) \cos \delta_{01} \sqrt{\tilde{D}t} \right), \quad (25)$$

где

$$\bar{c}_1 = \int \frac{\tilde{q}(t)e^{\delta_{02}\sqrt{\tilde{D}t}} \cos \delta_{01} \sqrt{\tilde{D}t}}{\lambda^2 \delta_{01} \sqrt{\tilde{D}}} dt, \quad \bar{c}_2 = - \int \frac{\tilde{q}(t)e^{\delta_{02}\sqrt{\tilde{D}t}} \sin \delta_{01} \sqrt{\tilde{D}t}}{\lambda^2 \delta_{01} \sqrt{\tilde{D}}} dt.$$

Для сопоставления полученного приближенного аналитического решения с результатами прямого численного анализа рассмотрим квадратную пластинку ($a = b = 2$ м), составленную из трансверсально изотропных пьезоэлектрических слоев, плоскости изотропии которых параллельны координатной плоскости xOy . Пьезоэлектрическим материалом слоев пластины является ВаТiО₃, тогда согласно [1, 11]

$$Q_{11} = Q_{22} = 120 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad Q_{12} = 36,2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad Q_{66} = 42 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2,$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z^2 dz, \quad e_{31}^{0k} = e_{32}^{0k} = -12,3 \text{ Кл/м}^2, \quad \rho = 5,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad (26)$$

$$\theta = 1; \quad R = 10; \quad q_0 = 10^8; \quad \frac{h}{a} = 0,1; \quad h = 0,2; \quad \delta = 2\delta_0 = \frac{h}{2} = 0,1;$$

где h — полная толщина пластинки.

Пластинка подвергается механической нагрузке в форме (1) и электрической в форме

$$V^k(x, y, t) = \varphi^k(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (27)$$

действие которой одинаково во всех слоях, т.е. $\varphi^k(t) = \varphi(t)$.

Для рассматриваемого случая уравнение (7) с учетом (3) и системы (5) примет вид

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - 2\rho h \varepsilon(t) \frac{\partial w}{\partial t} -$$

$$- \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^N e_{31}^{0k} z_0^k \varphi(t) \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N e_{32}^{0k} z_0^k \varphi(t) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (28)$$

В качестве примера положим, что $q(t) = R\varphi(t)$ и $\varphi(t) = q_0 \cos \theta t$. Тогда уравнение (28) примет вид

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -2\rho h \varepsilon(t) \frac{\partial w}{\partial t} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} +$$

$$+ \left[R + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sum_{k=1}^N e_{31}^{0k} z_0^k + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sum_{k=1}^N e_{32}^{0k} z_0^k \right] \varphi(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (29)$$

Решение этого уравнения аналогично решению уравнения (8).

Для получения графической интерпретации полученного решения (25) воспользуемся программным комплексом MAPLE. Для прямого численного решения исходного уравнения (29) используем метод Рунге–Кутты. Результаты численного анализа на основе предложенного гибридного асимптотического метода и численного метода Рунге–Кутты представлены на рис. 2 и в табл. 1. Сопоставление численных результатов демонстрирует достаточно высокую эффективность по величине параметра приближенного аналитического решения, возрастающую с течением времени независимо от характера изменения коэффициента демпфирования.

Отметим, что полученное приближенное аналитическое решение (25) уравнения (8) может быть использовано, согласно [3], в случае колебаний однослойной пьезоэлектрической

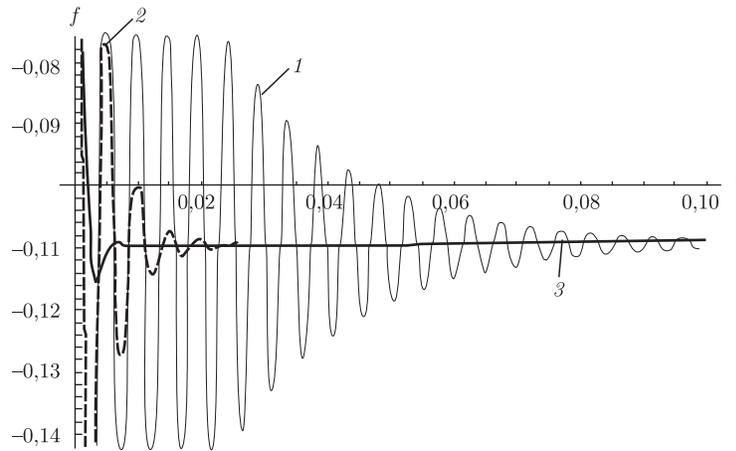


Рис. 2. Поведение характеристической функции $f(t)$ при коэффициенте демпфирования $\varepsilon(t) = t$ (1), $\varepsilon(t) = 5t$ (2), $\varepsilon(t) = e^{0,09t}$ (3)

Таблица 1

$\varepsilon(t) = t$		
t	Гибридное решение $f(t)$	Численное решение по методу Рунге–Кутты
0,03	-0,1071743990	-0,105764863015825688
0,035	-0,1124892722	-0,133609903608793212
0,04	-0,1154273314	-0,159883542812304684
2	0,04565994967	0,0422282881712131159
3	0,1086357085	0,107532028638544108
4	0,07173229785	0,0716948593241360234
5	-0,03112145658	-0,0311270814887880908

пластины, эффект связанности электрического и механического полей которой находит отражение в изменении жесткостных характеристик (коэффициента Пуассона и жесткости при цилиндрическом изгибе), а также в случае колебаний биморфной пьезоэлектрической пластины. Полученное решение позволяет решать ряд практических задач, связанных с вычислением величины тока проводимости в цепи генератора и параметров электроупругого поля (напряженность электрического поля, распределение электростатического потенциала в пластине, электрическая индукция и т. д.), с анализом резонансных и антирезонансных частот колебаний в переменном электрическом поле и анализом других динамических эффектов, возникающих в связанных электромеханических полях.

1. *Ishihara M., Noda N.* Nonlinear dynamic behaviour of a piezothermoelastic laminated plate with anisotropic material properties // *Acta mech.* – 2003. – No 166. – P. 103–118.
2. *Kasap S. O.* Principles of electrical engineering materials and devices. – New York: McGraw-Hill, 2000. – 690 p.
3. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т.; Т. 5).
4. *Карнаухов В. Г., Козлов А. В., Пятецкая Е. В.* Демпфирование колебаний вязкоупругих пластин с помощью распределенных пьезоэлектрических включений // *Акуст. вісник.* – 2002. – 5, № 4. – С. 15–32.
5. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И.* Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом // *Прикл. механика.* – 2001. – 37, № 2. – С. 45–77.

6. Mota Soares C. M., Mota Soares C. A., Franco Correia V. M. Optimal design of piezolaminated structures // Composite Structures. – 1999. – No 47. – P. 625–634.
7. Gristchak V. Z., Ganilova O. A. Application of a hybrid WKB-Galerkin method in control of the dynamic instability of a piezolaminated imperfect column // Techn. Mech. – 2006. – No 26. – P. 106–116.
8. Gristchak V., Dmitrieva Ye. A hybrid WKB-Galerkin method and its application // Ibid. – 1995. – No 15. – P. 281–294.
9. Geer J. F., Andersen C. M. Hybrid perturbation galerkin technique with application to slender body theory // SIAM J. Appl. Math. – 1989. – No 49. – P. 344–361.
10. Geer J. F., Andersen C. M. Investigating a hybrid perturbation-Galerkin technique using computer algebra / NASI – 18107. – Hampton, Virginia, 1988. – 26 p.
11. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
12. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 448 с.
13. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. – Москва: Физматгиз, 1957. – 463 с.
14. Lee C. K. Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors and actuators. Part 1: Governing equations and reciprocal relationships // J. Acoust. Soc. Amer. – 1990. – 87, No 3. – P. 1144–1158.
15. Miller S. E., Abramovich H., Oshman Y. Active distributed vibration control of anisotropic piezoelectric laminated plates // J. Sound and Vibr. – 1995. – 183, No 5. – P. 797–817.

Запорозьский национальный университет

Поступило в редакцию 12.09.2007

УДК 517.9

© 2008

П. О. Касьянов

Схема Дубінського для класу еволюційних рівнянь з відображеннями псевдомонотонного типу в нерелфлексивних банахових просторах

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. С. Мельником)

We study differential-operator equations with nonlinear mappings of the pseudomonotone type in nonreflexive Banach spaces. The main theorem on the existence of a periodic solution is proved. Important a priori estimates are obtained.

При дослідженні диференціально-операторних рівнянь та включень з відображеннями псевдомонотонного типу в функціональних рефлексивних банахових просторах часто використовують такі підходи: метод Фаедо–Гальоркіна, метод скінченних різниць, метод нелінійних напівгруп операторів, метод сингулярних збурень тощо. Метод нелінійних напівгруп операторів у банахових просторах розроблений О. О. Толстоноговим та Ю. І. Уманським [1, 2]. О. М. Вакуленко, В. С. Мельник, П. О. Касьянов та В. В. Ясінський розвинули метод сингулярних збурень в [3–5], метод Фаедо–Гальоркіна та метод скінченних різниць розроблений П. О. Касьяновим, В. С. Мельником та Л. Тоскано в [5–8].

У даній роботі розглядаються еволюційні рівняння з нелінійними операторами w_{λ_0} -псевдомонотонного типу. За схемою Ю. А. Дубінського [9] доводиться розв'язність періодичних задач у класі нерелфлексивних банахових просторів.