УДК 519.6

О. М. Литвин, Н. І. Штепа

Оператори інтерлінації лагранжевого типу на системі взаємно перпендикулярних прямих з використанням узагальнених поліномів

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Interlineation operators of the functions of two variables (blending function interpolation) with traces of a given function on a system of mutually perpendicular straight lines is investigated. For the construction of these operators, we use generalized polynomials which are not algebraic polynomials. Some examples are considered.

Постановка задачі. Вважаємо відомими:

а) систему взаємно перпендикулярних прямих, які, не обмежуючи загальності, вважаємо паралельними осям координат:

$$X\colon x = X_i, \quad i = \overline{1,m}; \quad Y : y = Y_j, \quad j = \overline{1,n}; \quad X_i, Y_j \in E = [0,1]; \quad m,n \geqslant 1;$$

б) систему слідів на цих лініях деякої функції (взагалі кажучи, невідомої) $f(x,y) \in C^{m,n}(D)$, $D = E^2$:

$$\Phi\colon \phi_i(y) = f(X_i, y), \quad i = \overline{1,m}; \quad \Psi\colon \psi_j(x) = f(x, Y_j), \quad j = \overline{1,n};$$

в) системи лінійно незалежних на E функцій однієї змінної (x або y)

$$U_1\colon u_{1,0}(x), u_{1,1}(x), \ldots, u_{1,m-1}(x), \ldots; \qquad U_2\colon u_{2,0}(y), u_{2,1}(y), \ldots, u_{2,n-1}(y), \ldots.$$

Треба побудувати за допомогою цієї інформації оператори інтерлінації $L_{m,n}(X, Y, \Phi, \Psi, U_1, U_2; x, y)$ з властивостями:

$$L_{m,n}(X, Y, \Phi, \Psi, U_1, U_2; X_i, y) = \phi_i(y), \qquad i = \overline{1,m},$$
$$L_{m,n}(X, Y, \Phi, \Psi, U_1, U_2; x, Y_j) = \psi_j(x), \qquad j = \overline{1,n}.$$

Дана задача, як і задача інтерполювання, не має єдиного розв'язку, але при відповідних обмеженнях на системи U_1, U_2, X, Y такі оператори існують і єдині. Дослідимо інтерлінацію функцій двох змінних операторами, що використовують узагальнені поліноми

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k u_{1,k}(x), \qquad Q_n(y) = \sum_{\ell=0}^{n-1} D_\ell u_{1,\ell}(y).$$

Для практики, крім добре вивченої поліноміальної системи функцій $u_k(x) = x^k$, $k \in N^0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, цікавими є також системи $u_k(x) = e^{\alpha x} x^k$, $k \in N^0$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $u_{k,\ell}(x) = e^{\alpha_\ell x} x^k$, $\alpha_\ell \in \mathbb{R}$, $k \in N^0$, $1 \leqslant \ell \leqslant M$, та інші системи функцій — розв'язків звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

У даній роботі вперше формулюються основні твердження про явні вирази для операторів узагальненої поліноміальної інтерлінації на системі взаємно перпендикулярних прямих та зображення залишкових членів наближення з їх допомогою диференційовних функцій. Детальніше досліджуються наближення функцій двох змінних операторами узагальненої інтерлінації функцій з використанням поліномів двох написаних вище систем функцій.

Оператори поліноміальної інтерлінації (blending function interpolation) на системі взаємно перпендикулярних прямих $x = X_i$, $y = Y_j$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ (тобто оператори $L_{m,n}(X, Y; \Phi; \Psi; \{x^p\}, \{y^q\}; x, y))$ досліджувалися в роботах [1–14] (див. бібліогр. у [10, 11]). Поліноміальний базис x^i, y^j, $x^i y^j$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$; $0 \leqslant j \leqslant n-1$, що задовольняє диференціальне рівняння $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n} = 0$ є частинним випадком базису, що задовольняє диференціальне рівняння загального вигляду

$$\sum_{p=0}^{m} a_p(x) \frac{\partial^p}{\partial x^p} \sum_{q=0}^{n} b_q(y) \frac{\partial^q u}{\partial y^q} = 0,$$

$a_p(x)$, $b_q(y) \in C(R)$. Це дозволяє стверджувати, що в загальному випадку можна отримати кращу точність наближення до конкретної функції $f(x, y)$ або до конкретного класу функцій. Тому актуальною є побудова і дослідження операторів інтерлінації для інших систем лінійно незалежних функцій $u_{1,i}(x)$, $u_{2,j}(y)$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$; $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Позначення. Для побудови операторів інтерполювання узагальненими поліномами замість системи лінійно незалежних на E функцій $u_i(x) \in C^n(R)$, $i = \overline{0, n-1}$, які задовольняють умову $\triangle \neq 0$, $\triangle = \det[u_\mu(X_\nu)]_{\mu=\overline{0,n-1}}^{\nu=\overline{1,n}}$, введемо систему $\{V_i(x)\}_{i=1}^{n}$,

$$V_i(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik} u_k(x).$$

Коефіцієнти a_{ik} визначимо шляхом розв'язання таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь $V_i(X_j) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{ik} u_k(X_j) = \delta_{i,j}$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant n$, $\delta_{i,i} - 1$; $\delta_{i,j} - 0$, $i \neq j$. Як відомо, якщо $w_{n-1}(x) = \det[u_i^{(j)}(x)]_{i=\overline{0,n-1}}^{j=\overline{0,n-1}}$ — вронськіан системи $u_i(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, то загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння $L_n y = f(x)$,

$$L_n y := \begin{vmatrix} u_0(x) & \ldots & u_{n-1}(x) & y(x) \\ u_0'(x) & \ldots & u_{n-1}'(x) & y'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_0^{(n)}(x) & \ldots & u_{n-1}^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} w_{n-1}^{-1}(x),$$

можна знайти методом варіації довільних сталих у вигляді $y = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_k(x) u_k(x)$.

Допоміжні твердження. Якщо врахувати вирази для $V_i(x)$ через $u_0(x), \ldots, u_{n-1}(x)$, то можна довести такі леми.

Лема 1. *Якщо* $w_{n-1}(x) \neq 0$, $x \in E$, *то* $W_n(x) \neq 0$, $x \in E$, *де* $W_n(x)$ — *вронськіан системи функцій* $\{V_i(x)\}_{i=1}^{n}$: $W_n(x) = \det[V_i^{(j)}(x)]_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{0,n-1}}$.

Лема 2. *Хай $y(t) \in C^n(E)$, $A_{n,k}(t)$ — алгебраїчні доповнення до k-го елемента n-го рядка у $W_n(t)$. Тоді*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_{k0} V_k(x) + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{X_k}^{x} \frac{V_k(x) A_{n,k}(t)}{W_n(t)} L_n y(t)\, dt,$$

$C_{k0} \in R$, $k = \overline{1,n}$. Для дослідження залишку

$$R_n y(x) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{X_k}^{x} \frac{V_k(x) A_{n,k}(t)}{W_n(t)} L_n y(t)\, dt$$

наближення функції $y(x)$ операторами інтерполювання

$$O_n y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_{k0} V_k(x), \qquad O_n y(X_p) = C_{p0}, \qquad p = \overline{1,n},$$

у вигляді

$$R_n f(x) = L_n y(\xi) \Omega(x, X, \{u_i\}), \qquad X_1 \leqslant \xi \leqslant X_n,$$

$$\Omega(x, X, \{u_i\}) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{X_k}^{x} \frac{V_k(x) A_{n,k}(t)}{W_n(t)} dt$$

потрібно дослідити функцію $\Omega(x, X, \{u_i\})$. Зокрема, для неї справедлива

Лема 3. *Функція $\Omega(x, X, \{u_i\})$ є розв'язком n-точкової крайової задачі*

$$L_n Z_n(x) = 1, \qquad x \notin X; \qquad Z_n(X_p) = 0, \qquad p = \overline{1,n}.$$

Приклади.

1. Якщо $u_k(t) = x^k$, $k \in N^0$, то $\Omega(x, X, \{x^i\}) = \dfrac{1}{n!} \prod\limits_{k=1}^{n} (x - X_k)$, $L_n = \dfrac{d^n}{dx^n}$.

2. Якщо $u_j(t) = e^{jt} = (e^t)^j = x^j = u_j(x)$, $x = e^t$, $j \in N^0$, то вводячи замість функції $y(t)$ функцію $z(x) = y(\ln x)$, замість вузлів t_k, $k = \overline{1,n}$, вузли $X_k = e^{t_k}$, $k = \overline{1,n}$, можна для функції $z(x)$ написати інтерполяційний поліном за степенями x^i, тобто поліном Лагранжа. У результаті маємо

$$z(x) = \sum_{k=1}^{n} z(x_k) \prod_{i=1, i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} + z^{(n)}(\xi) \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (x - x_k)}{n!},$$

$$z^{(n)}(\xi) = \left. \frac{d^n z(x)}{dx^n} \right|_{x=\xi}, \qquad X_1 \leqslant \xi \leqslant X_n.$$

Після заміни змінної отримаємо

$$z(x) = z(e^t) = y(t) = \sum_{k=1}^{n} y(t_k) \prod_{i=1, i \neq k}^{n} \frac{e^t - e^{t_j}}{e^{t_k} - e^{t_j}} + z^{(n)}(\xi) \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (e^t - e^{t_k})}{n!}.$$

Якщо $y(t) \in C^n[a,b]$, то для практики корисним є зображення операторів $z^n(t)$ у вигляді добутку диференціальних операторів першого порядку:

$$z^{(n)}(x)|_{x=e^t} = \frac{d^n z(x)}{dx^n}\bigg|_{x=e^t} = \frac{1}{e^{nt}} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{d}{dt} - i\right) y(t).$$

Для системи $\{u_i(x)\}$ загального вигляду таке зображення можна виконати методом, викладеним у роботі [15].

Оператори узагальненої поліноміальної інтерлінації функцій двох змінних. Хай $u1_k(x)$, $u2_\ell(y)$, x, $y \in E$; k, $\ell \in N^0$, — дві системи лінійно незалежних на E функцій з властивостями:

1) їх вронськіани не дорівнюють нулю

$$w1_0(x) = u1_0(x) \neq 0, \qquad x \in E; \qquad w2_0(y) = u2_0(y) \neq 0, \qquad y \in E;$$

$$w1_{n-1}(x) = \det[u1_k^{(s)}(x)]_{k=\overline{0,n-1}}^{s=\overline{0,n-1}} \neq 0, \qquad x \in E, \qquad \forall n \in N = \{1, 2, \ldots\};$$

$$w2_{n-1}(y) = \det[u2_\ell^{(p)}(y)]_{\ell=\overline{0,n-1}}^{p=\overline{0,n-1}} \neq 0, \qquad y \in E, \qquad \forall n \in N;$$

2) ці системи задовольняють умови

$$\triangle 1 = \det\big[u1_k(X_q)\big]_{k=\overline{0,n-1}}^{q=\overline{1,n}} \neq 0 \qquad \forall\, X_q \in E, \qquad 0 \leqslant X_1 < X_2 < \cdots < X_m \leqslant 1;$$

$$\triangle 2 = \det\big[u2_\ell(Y_p)\big]_{\ell=\overline{0,n-1}}^{p=\overline{1,n}} \neq 0 \qquad \forall\, Y_p \in E, \qquad 0 \leqslant Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_n \leqslant 1.$$

Використовуючи лінійні комбінації вказаних систем функцій, побудуємо інші дві системи функцій $V1_k(x)$, $V2_i(y)$, $1 \leqslant k \leqslant m$; $1 \leqslant \ell \leqslant n$ з властивостями $V1_k(X_q) = \delta_{k,q}$, k, $q = \overline{1,n}$; $V2_\ell(Y_p) = \delta_{\ell,p}$, ℓ, $p = \overline{1,n}$. На основі твердження леми 1 можна довести, що вронськіани цих нових систем лінійно незалежних функцій теж будуть задовольняти умови

$$W1_m(x) = \det\big[V1_k^{(s)}(x)\big]_{k=\overline{1,m}}^{s=\overline{0,m-1}} \neq 0, \qquad x \in E, \qquad m \geqslant 2,$$

$$W2_n(y) = \det\big[V2_\ell^{(p)}(y)\big]_{\ell=\overline{1,n}}^{p=\overline{0,n-1}} \neq 0, \qquad y \in E, \qquad n \geqslant 2.$$

Введемо до розгляду оператори

$$O_1 f(x,y) = \sum_{k=1}^{m} f(X_k, y) V1_k(x); \qquad O_2 f(x,y) = \sum_{\ell=1}^{n} f(x, Y_\ell) V2_\ell(y),$$

що є операторами інтерполювання узагальненими поліномами за однією змінною

$$O_1 f(X_k, y) = f(X_k, y), \qquad k = \overline{1,m}; \qquad O_2 f(x, Y_\ell) = f(x, Y_\ell), \qquad \ell = \overline{1,n}.$$

Теорема 1. *Оператори*

$$Of(x,y) = (O_1 + O_2 - O_1 O_2) f(x,y)$$

інтерлінують кожну неперервну функцію $f(x,y)$ на системі взаємно перпендикулярних прямих $x = X_p$, $p = \overline{1,m}$; $y = Y_q$, $q = \overline{1,n}$:

$$O_1 f(X_p, y) = f(X_p, y), \qquad p = \overline{1,m}; \qquad O_2 f(x, Y_q) = f(x, Y_q), \qquad q = \overline{1,n}.$$

Теорема 2. *Якщо* $R_i f(x,y) = (I - O_i)f(x,y)$, $i = 1,2$, *то для залишку* $Rf(x,y) = (I - O)f(x,y)$ *наближення функції* $f(x,y)$ *оператором інтерлінації* $Of(x,y)$ *виконується співвідношення*

$$Rf(x,y) = R_1 R_2 f(x,y).$$

Таким чином, досліджені оператори інтерлінації за допомогою узагальнених поліномів, які не є алгебраїчними поліномами, можуть знайти застосування в різних галузях науки, зокрема в теорії наближення функцій при побудові сплайнів від двох змінних неполіноміального типу (L-сплайнів, узагальнених B-сплайнів тощо).

1. *Mangeron D.* Sopra un problema al contorno per un' equatione differentiable alle derivative parziali di quartordine conle caratteristice reali dopie // Rend. Accad. sci. fiz. e mat. Napoli. – 1932. – No 2. – P. 28–40.
2. *Gordon W.* Blending function methods for bivariate and multivariate interpolation and approximation // SIAM J. Numer. Anal. – 1971. – No 4. – P. 158–177.
3. *Coons S. A.* Surface for computer-aided design of space forms // Project Mac report MAC-TR-41. Cambridge. – 1967. – June. – P. 3–30.
4. *Алберг Д. Е., Нильсон Е., Уолш Д.* Теория сплайнов и ее приложения. – Москва: Мир, 1972. – 316 с.
5. *Рвачев В. Л.* Геометрические приложения алгебры логики. – Киев: Техника, 1967. – 212 с.
6. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 550 с.
7. *Анікеенко А. М., Литвин О. М., Рвачов В. Л., Сафонов М. О.* Про формулу розкладу в околі кута // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 2. – С. 99–101.
8. *Литвин О. М., Федько В. В.* Обобщенная кусочно-эрмитова интерполяция // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, № 6. – С. 812–819.
9. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
10. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 331 с.
11. *Корнейчук Н. П., Переверзев С. В.* К вопросу о приближении функций двух переменных операторами, построенными на базе одномерных операторов // Теория функций и топология: Сб. науч. тр. Ин-та математики АН УРСР. – Киев, 1983. – С. 43–49.
12. *Литвин О. Н., Сергиенко И. В.* Методы аппроксимации функций и современные компьютерные технологии. Обзор // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 1. – С. 64–81.
13. *Lytvyn O. N.* Interlineation and interflatation functions of many variables (blending functions interpolation) and economical algorithms in the Approximation theory. Computational Methods // Proc. 1st Intern. Conf. of Comput. Methods, Sing pore, 15–17 Dec., 2004 / Eds. G. R. Liu, V. B. C. Tan, X. Han. – Singapore: Springer, 2006. – Bd. 2. – P. 1105–1110.
14. *Lytvyn O. M.* Methods of a solution of boundary-value problems of continuum mechanics, reducing to system of ordinary linear (LIDE) or nonlinear (NIDE) integro-differential equations // Num. modelling in continuum mechanics. Proc. of the 4th summer conf. held in Prague, 31 July – 4 Aug., 2000 / Eds. M. Feistauer, R. Rannacher, K. Kozel. – Pragua, 2001. – P. 240–250.
15. *Widder D. V.* A generalization of Taylor's series // Trans. Amer. Math. Soc. – 1928. – **30**. – P. 129–135.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

Надійшло до редакції 29.05.2007