УДК 517.944

Академік НАН України **Ю. О. Митропольський, Г. П. Хома,**
С. Г. Хома-Могильська

Розв'язки крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку

We obtained the conditions of solvability of a boundary-value inhomogeneous periodic problem for particular values of the period ω on the base of a solution of the boundary-value periodic problem $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,t+\omega) = u(x,t)$. This solution is represented with the formula $u(x,t) = u^0(x,t) + \widetilde{u}(x,t)$. Here, $u^0(x,t)$ is the solution corresponding to the homogeneous periodic problem and $\widetilde{u}(x,t)$ is a partial solution of the inhomogeneous equation where $\widetilde{u}(x,t+\omega) = \widetilde{u}(x,t)$. We demonstrate that the obtained solution contains the results that were found before.

При розв'язанні крайових задач для рівнянь у частинних похідних, як зазначалося в статті [1], першочерговими є питання про встановлення умов їх розв'язності та існування єдиного розв'язку вказаних задач. У даній роботі ми досліджуємо умови розв'язності крайової періодичної задачі $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,t+\omega) = u(x,t)$ для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$, розглядаючи випадки $\omega = \pi$ та $\omega = 4\pi$.

π-періодичні розв'язки крайової періодичної задачі. Припустимо, що

$$\omega = \frac{2s-1}{2m-1}\pi, \qquad s, m \in \mathbb{N}, \qquad (2s-1, 2m-1) = 1.$$

Тоді

$$\nu_k = \frac{2\pi k}{\omega} = \frac{2(2m-1)}{2s-1}k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо найпростіший випадок $m = s = 1$. При цьому система (18) роботи [1]

$$\begin{gathered} B + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^1 \cos\nu_k t + A_k^3 \sin\nu_k t) + \widetilde{u}(0,t) = 0, \\ A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^1 \cos\nu_k \pi + A_k^2 \sin\nu_k \pi)\cos\nu_k t + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^3 \cos\nu_k \pi + A_k^4 \sin\nu_k \pi)\sin\nu_k t + \widetilde{u}(\pi,t) = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

розв'язності лінійної неоднорідної крайової ω-періодичної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x,t), \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x, t+\omega) = u(x,t), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

для $\nu_k = 2k$, $\omega = \pi$, набуває вигляду

$$\begin{gathered} B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos 2kt + A_k^3 \sin 2kt) + \widetilde{u}(0,t) = 0, \\ A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos 2kt + A_k^3 \sin 2kt) + \widetilde{u}(\pi,t) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Очевидно, система (4) при $\widetilde{u}(0,t) = \widetilde{u}(\pi,t) = \mathrm{const}$ для всіх $t \in \mathbb{R}$ завжди має єдиний розв'язок

$$B = -\widetilde{u}(0,t), \qquad A = 0, \qquad A_k^1 = A_k^3 = 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Вважатимемо знову, що $\widetilde{u}(x,t) = (Sg)(x,t)$, де

$$(Sg)(x,t) = -\frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau). \tag{5}$$

Справедливі твердження.

Лема 1. *Якщо* $g \in C_\pi \bigcap A_1 = \{g\colon g(x,t) = g(\pi - x, t) = g(x, t+\pi)\}$, *то* $g \in A_2 = \{g\colon g(x,t) = g(\pi - x, t+\pi) = g(x, t+2\pi)\}$.

Зауважимо, що властивості класу функцій A_2 детально вивчені в [1].

Лема 2. *Якщо* $g \in C_\pi \bigcap A_1$, *то*

$$(Sg)(0,t) = (Sg)(\pi,t) = \mathrm{const}. \tag{6}$$

Доведення. Те, що $(Sg)(0,t) = \mathrm{const}$ і $(Sg)(\pi,t) = \mathrm{const}$, випливає з леми 2 роботи [1], оскільки $A_1 \subset A_2$. Нехай $g \in A_1$. Тоді

$$(Sg)(\pi,t) = -\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau = -\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi d\eta \int\limits_{t-\eta}^{t+\eta} g(\pi-\eta,\tau) =$$

$$= -\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi d\eta \int\limits_{t-\eta}^{t+\eta} g(\eta,\tau) \equiv (Sg)(0,t),$$

що й потрібно було довести.

Отже, покладаючи $\widetilde{u}(x,t) = (Sg)(x,t)$, у випадку $\omega = \pi$ на основі лем 1 і 2 даної роботи та теореми 1 роботи [1] ми отримуємо такий відомий результат.

Теорема 1 [2]. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \bigcap A_1$, *то функція* $u = R_1 g$, *яка визначена формулою*

$$u(x,t) = (R_1 g)(x,t) \equiv (Sg)(x,t) + \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau), \tag{7}$$

є единою функцією з класу $C^{2,2}_{\pi}\bigcap A_1$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі* (2), (3) *при* $\omega=\pi$. *Крім цього,* $R_1\in L(C_\pi\bigcap A_1,\, C^{1,1}_{\pi}\bigcap A_1)$, $R_1\in L\bigl(G_{\pi t}\bigcap A_1, C^{2,2}_{\pi}\bigcap A_1\bigr)$.

Зауваження 1. Система (4) розв'язності крайової $\omega=\pi$-періодичної задачі (2), (3) завжди має тривіальний розв'язок, якщо $\widetilde{u}(0,t)=\widetilde{u}(\pi,t)\equiv 0$, $t\in\mathbb{R}$.

Справедливі твердження.

Лема 3. *Якщо* $g\in C_\pi\bigcap A_2^-=\{g\colon g(x,t)=g(\pi-x,t+\pi)=g(x,t+2\pi)=-g(x,-t)\}$, *то* $\widetilde{u}(0,t)\equiv(Sg)(0,t)=0$ *і* $\widetilde{u}(\pi,t)\equiv(Sg)(\pi,t)=0$, $t\in\mathbb{R}$.

Доведення. Оскільки при $g\in C_\pi\bigcap A_2^-$

$$(Sg)(0,0)=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}d\xi\int\limits_{-\xi}^{\xi}g(\xi,\tau)\equiv 0;$$

$$(Sg)(\pi,0)=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}d\xi\int\limits_{-\pi+\xi}^{\pi-\xi}g(\xi,\tau)=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}d\xi\int\limits_{-(\pi-\xi)}^{\pi-\xi}g(\xi,\tau)\equiv 0,$$

то на основі леми 2 маємо $(Sg)(0,t)=(Sg)(\pi,t)=0$, $t\in\mathbb{R}$, що й потрібно було довести.

Теорема 2. *Якщо* $g\in G_{\pi t}\bigcap A_k^-$, $k=1,2$, *то функція*

$$u(x,t)=(\mathrm{Sg})(x,t) \tag{8}$$

є единою функцією з класу $C^{2,2}_{\pi}\bigcap A_k^-$, $k=1,2$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі* (2), (3) *при* $\omega=k\pi$, $k=1,2$.

4π-періодичні розв'язки крайової періодичної задачі. Припустимо, що

$$\omega=\frac{2\pi p}{2s-1},\qquad p=2m,\qquad m,s\in\mathbb{N},\qquad (p,2s-1)=1.$$

Тоді

$$\nu_k=\frac{2\pi k}{\omega}=\frac{2s-1}{2m}k.$$

Розглянемо знову частковий випадок $s=m=1$, тобто, коли $\omega=4\pi$. У цьому випадку $\nu_k=k/2$, $k\in\mathbb{N}$ і система (1) розв'язності крайової $\omega=4\pi$-періодичної задачі (2), (3) набуває вигляду

$$\begin{gathered}
B+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos\frac{kt}{2}+A_k^3\sin\frac{kt}{2}\right)+\widetilde{u}(0,t)=0,\\
A\pi+B+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos\frac{k\pi}{2}+A_k^2\sin\frac{k\pi}{2}\right)\cos\frac{kt}{2}+\\
+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^3\cos\frac{k\pi}{2}+A_k^4\sin\frac{k\pi}{2}\right)\sin\frac{kt}{2}+\widetilde{u}(\pi,t)=0.
\end{gathered} \tag{9}$$

Припустимо, що значення $\widetilde{u}(0,t)$ частинного розв'язку неоднорідного рівняння $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$ тотожно дорівнює нулеві, тобто $\widetilde{u}(0,t)\equiv 0$ для всіх $t\in\mathbb{R}$. Тоді перше рівняння системи (9) має єдиний нульовий розв'язок

$$B=0,\qquad A_k^1=A_k^3=0,\qquad k\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Підставляючи розв'язок (10) у друге рівняння системи (9), одержуємо таку рівність:

$$A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2 \sin\frac{k\pi}{2}\cos\frac{kt}{2} + A_k^4 \sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{kt}{2}\right) + \widetilde{u}(\pi,t) = 0. \tag{11}$$

Припустимо, що при $\widetilde{u}(\pi,t) \not\equiv \mathrm{const}$ рівняння (11) має єдиний ненульовий розв'язок. Тоді згідно з формулою (17) [1] розв'язок крайової періодичної задачі (1), (2) при $\omega = 4\pi$ запишеться так:

$$u(x,t) = Ax + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2 \cos\frac{kt}{2} + A_k^4 \sin\frac{kt}{2}\right)\sin\frac{kx}{2} + \widetilde{u}(x,t) \equiv u^0(x,t) + \widetilde{u}(x,t), \tag{12}$$

де $u^0(x,t)$ — розв'язок однорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = 0$, а $\widetilde{u}(x,t)$ — неоднорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$ і такий, що $\widetilde{u}(0,t) = 0$ і $\widetilde{u}(\pi,t) \not\equiv \mathrm{const}$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Вкажемо клас функцій, для якого існує точний розв'язок крайової періодичної задачі (1), (2) при $\omega = 4\pi$. Для цього доведемо, що при умові, коли невідома 4π-періодична функція $\mu(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$ допускає розклад у рівномірно збіжний ряд Фур'є вигляду

$$\mu(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{kt}{2} + b_k \sin\frac{kt}{2}\right), \tag{13}$$

розв'язок

$$u^0(x,t) = Ax + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2 \cos\frac{kt}{2} + A_k^4 \sin\frac{kt}{2}\right)\sin\frac{kx}{2} \tag{14}$$

однорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = 0$, що входить у формулу (12), може бути зображений у вигляді

$$u^0(x,t) = \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha. \tag{15}$$

Справді, підставляючи (13) у формулу (15), знаходимо

$$u^0(x,t) = \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\alpha}{2} + b_k\sin\frac{k\alpha}{2}\right)\right\}d\alpha =$$

$$= \frac{a_0}{2}x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2a_k}{k}\sin\frac{k\alpha}{2}\bigg|_{t-x}^{t+x} - \frac{2b_k}{k}\cos\frac{k\alpha}{2}\bigg|_{t-x}^{t+x}\right\} =$$

$$= \frac{a_0}{2}x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2a_k}{k}\left(\sin\frac{k}{2}(t+x) - \sin\frac{k}{2}(t-x)\right) - \frac{2b_k}{k}\left(\cos\frac{k}{2}(t+x) - \cos\frac{k}{2}(t-x)\right)\right\} =$$

$$= \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2a_k}{k}\cos\frac{kt}{2} + \frac{2b_k}{k}\sin\frac{kt}{2}\right\}\sin\frac{kx}{2}.$$

Таким чином, покладаючи в останній рівності

$$\frac{a_0}{2} = A, \qquad \frac{2a_k}{k} = A_k^2, \qquad \frac{2b_k}{k} = A_k^4, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

і враховуючи позначення $u^0(x,t)$ у формулах (14) і (15), одержуємо при нашому припущенні (16), що $u^0(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\, d\alpha$, що й потрібно було довести. Отже, у випадку $\omega = 4\pi$ розв'язок крайової періодичної задачі (2), (3) має вигляд

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\, d\alpha + \widetilde{u}(x,t), \tag{17}$$

де $\mu(t)$ — невідома неперервно диференційована і 4π — періодична функція, а $\widetilde{u}(x,t)$ — частинний розв'язок крайової $\omega = 4\pi$-періодичної задачі (2), (3) такий, що $\widetilde{u}(0,t) \equiv 0$, $\widetilde{u}(\pi,t) \not\equiv \mathrm{const}$, для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Якщо вважати, що

$$\widetilde{u}(x,t) = (S_1 g)(x,t) \equiv -\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau \tag{18}$$

і припустити, що $g \in G_{\pi t}$, $g(x, t+4\pi = g(x,t)$, $\mu \in C_\pi^1(\mathbb{R})$, $\mu(t+4\pi) = \mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, то функція

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\, d\alpha + (S_1 g)(x,t) \tag{19}$$

є єдиним класичним розв'язком $\omega = 4\pi$-періодичної задачі (2), (3), причому $u(0,t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Покажемо, що існує клас функцій $\mu(t)$, для яких виконується друга крайова умова

$$u(\pi,t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\, d\alpha - \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau = 0. \tag{20}$$

Диференціюючи рівність (20), маємо

$$\mu(t+\pi) - \mu(t-\pi) = \int\limits_0^\pi \{g(\xi, t+\pi-\xi) - g(\xi, t-\pi+\xi)\}\, d\xi. \tag{21}$$

Позначимо через $A_{4\pi}$ такий клас функцій:

$$A_{4\pi} := \{g\colon g(x,t) = -g(x,t+2\pi)\}.$$

Лема 4. *Якщо* $g \in C_\pi \bigcap A_{4\pi}$, *то* $g \in Q_{4\pi}$.

Доведення. Справді, $g(x,t+4\pi) = g(x,t+2\pi+2\pi) = -g(x,t+2\pi) = g(x,t)$, що й потрібно було довести.

Замінюючи у рівності (21) t на $t+\pi$ і припускаючи, що $\mu(t) \in A_{4\pi}$ і $g \in A_{4\pi}$, знаходимо

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} (g(\xi, t-\xi) + g(\xi, t+\xi))\, d\xi. \tag{22}$$

Отже, ми показали, що для кожної функції $g \in A_{4\pi}$ існує функція $\mu(t)$, яка належить класу $A_{4\pi}$. У результаті підстановки її у формулу (19) одержуємо в класі функцій $A_{4\pi}$ такий точний розв'язок:

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\int\limits_{t-x}^{t+x} d\alpha \int\limits_0^{\pi} (g(\xi, \alpha-\xi) + g(\xi, \alpha+\xi))\, d\xi - \frac{1}{2}\int\limits_0^{x} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau \tag{23}$$

крайової періодичної задачі (2), (3) при $\omega = 4\pi$.

Перетворюючи (23), знаходимо

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-x}^{t+x} (g(\xi, \alpha-\xi) + g(\xi, \alpha+\xi))\, d\alpha - \frac{1}{2}\int\limits_0^{x} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-x-\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_0^{x} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-x-\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau -$$

$$- \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_0^{x} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-x-\xi}^{t+x+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_0^{x} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau \equiv$$

$$\equiv (Sg)(x,t) + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-x-\xi}^{t+x+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau. \tag{24}$$

Теорема 3 [3]. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \bigcap A_{4\pi}$, *то функція*

$$u(x,t) = (R_{4\pi})(x,t) \equiv (Sg)(x,t) + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-x-\xi}^{t+x+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau \tag{25}$$

є единою функцією з класу $C_{\pi}^{2,2} \bigcap A_{4\pi}$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі* (2), (3) *при* $\omega = 4\pi$.

Таким чином, на основі умови розв'язності (18) роботи [1] досліджено і доведено існування π-періодичних і 4π-періодичних розв'язків крайової ω-періодичної задачі.

1. *Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г.* Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 7. – С. 912–921.
2. *Митропольський Ю. О., Хома Н. Г.* Періодичні розв'язки квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку // Там же. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1370–1375.
3. *Домбровський І. В.* Існування гладкого розв'язку квазілінійного гіперболічного рівняння другого порядку // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2000. – № 6 (14). – С. 136–141.

Інститут математики НАН України, Київ
Тернопільський національний економічний університет

Надійшло до редакції 11.09.2007

УДК 517.95

Г. А. Снітко

Розв'язність оберненої задачі для параболічного рівняння з невідомим молодшим коефіцієнтом в області з вільною межею

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

We established the conditions of existence and uniqueness of a solution to the inverse problem for a one-dimensional parabolic equation with unknown time dependent minor coefficient in a domain with free boundary.

У роботі досліджено обернену задачу визначення залежного від часу коефіцієнта при невідомій функції в параболічному рівнянні другого порядку загального вигляду в області з вільною межею. Зазначимо, що в праці [1] встановлено умови однозначного визначення залежних від часу коефіцієнтів $a(t)$, $q(t)$ у параболічному рівнянні

$$u_t = a(t)u_{xx} + q(t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in (0,h) \times (0,T).$$

У [2] розглянуто задачу визначення $q(t)$ у рівнянні, коли старший коефіцієнт відомий, $a(t) = 1$, а додаткова умова має вигляд

$$\int\limits_0^{s(t)} u(x,t)dx = E(t), \qquad t \in [0,T], \qquad 0 < s(t) \leqslant h.$$

Задача з вільною межею з інтегральною умовою перевизначення досліджена в [3].

В області $\Omega_T = \{(x,t)\colon 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$ з невідомою межею $x = h(t)$ розглядаємо параболічне рівняння з невідомим коефіцієнтом $c = c(t)$

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$