Таким чином, на основі умови розв'язності (18) роботи [1] досліджено і доведено існування π-періодичних і 4π-періодичних розв'язків крайової ω-періодичної задачі.

1. *Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г.* Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 7. – С. 912–921.
2. *Митропольський Ю. О., Хома Н. Г.* Періодичні розв'язки квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку // Там же. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1370–1375.
3. *Домбровський І. В.* Існування гладкого розв'язку квазілінійного гіперболічного рівняння другого порядку // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2000. – № 6 (14). – С. 136–141.

Інститут математики НАН України, Київ
Тернопільський національний економічний університет

Надійшло до редакції 11.09.2007

УДК 517.95

Г. А. Снітко

Розв'язність оберненої задачі для параболічного рівняння з невідомим молодшим коефіцієнтом в області з вільною межею

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

We established the conditions of existence and uniqueness of a solution to the inverse problem for a one-dimensional parabolic equation with unknown time dependent minor coefficient in a domain with free boundary.

У роботі досліджено обернену задачу визначення залежного від часу коефіцієнта при невідомій функції в параболічному рівнянні другого порядку загального вигляду в області з вільною межею. Зазначимо, що в праці [1] встановлено умови однозначного визначення залежних від часу коефіцієнтів $a(t)$, $q(t)$ у параболічному рівнянні

$$u_t = a(t)u_{xx} + q(t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in (0,h) \times (0,T).$$

У [2] розглянуто задачу визначення $q(t)$ у рівнянні, коли старший коефіцієнт відомий, $a(t) = 1$, а додаткова умова має вигляд

$$\int\limits_0^{s(t)} u(x,t)dx = E(t), \qquad t \in [0,T], \qquad 0 < s(t) \leqslant h.$$

Задача з вільною межею з інтегральною умовою перевизначення досліджена в [3].

В області $\Omega_T = \{(x,t)\colon 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$ з невідомою межею $x = h(t)$ розглядаємо параболічне рівняння з невідомим коефіцієнтом $c = c(t)$

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

початкову умову

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad x\in[0,h(0)], \tag{2}$$

крайові умови

$$u(0,t)=\mu_1(t), \qquad u(h(t),t)=\mu_2(t), \qquad t\in[0,T], \tag{3}$$

та додаткові умови

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx=\mu_3(t), \qquad \int\limits_0^{h(t)} xu(x,t)dx=\mu_4(t), \qquad t\in[0,T]. \tag{4}$$

Вводячи нову змінну $y=x/h(t)$, зводимо задачу (1)–(4) до оберненої стосовно невідомих $h(t)$, $c(t)$, $v(y,t)$, де $v(y,t)=u(yh(t),t)$, в області $Q_T=\{(y,t)\colon 0<y<1, 0<t<T\}$:

$$v_t=\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy}+\frac{b(yh(t),t)+yh'(t)}{h(t)}v_y+c(t)v+f(yh(t),t), \qquad (y,t)\in Q_T, \tag{5}$$

$$v(y,0)=\varphi(yh(0)), \qquad y\in[0,1], \tag{6}$$

$$v(0,t)=\mu_1(t), \qquad v(1,t)=\mu_2(t), \qquad t\in[0,T], \tag{7}$$

$$h(t)\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\mu_3(t), \qquad h^2(t)\int\limits_0^1 yv(y,t)dy=\mu_4(t), \qquad t\in[0,T]. \tag{8}$$

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

A1) $a,b,f\in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,T])$, $\varphi\in C^1[0,\infty)$, $\mu_i\in C^1[0,T]$, $i=\overline{1,4}$*;*

A2) $a(x,t)>0$, $f(x,t)\geqslant 0$, $(x,t)\in[0,\infty)\times[0,T]$, $\varphi(x)\geqslant\varphi_0>0$, $x\in[0,\infty)$, $\mu_i(t)>0$, $i=\overline{1,4}$, $t\in[0,T]$*;*

A3) $\varphi(0)=\mu_1(0)$, $\varphi(h(0))=\mu_2(0)$.

Тоді можна вказати таке число $T_0\colon 0<T_0\leqslant T$*, яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок* $(h,c,v)\in C^1[0,T_0]\times C[0,T_0]\times C^{2,1}(Q_{T_0})\bigcap C(\overline{Q}_{T_0})$, $h(t)>0$, $t\in[0,T]$*, задачі* (5)–(8).

Доведення. З умов (2), (4) та припущень теореми 1 випливає існування єдиного значення $h(0)=h_0$, яке задовольняє рівняння

$$\int\limits_0^{h(0)}\varphi(x)dx=\mu_3(0).$$

Зведемо задачу (5)–(8) до еквівалентної системи рівнянь. Тимчасово припустимо, що функції $h(t)$, $c(t)$ відомі. Введемо позначення $p(t)=h'(t)$, $w(y,t)=v_y(y,t)$. Пряма задача (5)–(7) еквівалентна рівнянню

$$v(y,t)=v_0(y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\left(\frac{\eta p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau)+c(\tau)v(\eta,\tau)\right)d\eta d\tau, (y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{9}$$

де $v_0(y,t)$ є розв'язком рівняння

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(yh(t),t)}{h(t)} v_y + f(yh(t),t), \tag{10}$$

який задовольняє умови (6), (7), а $G_1(y,t,\eta,\tau)$ — функція Гріна першої крайової задачі для рівняння (10).

Випишемо задачу для знаходження $w(y,t)$. Продиференціювавши (5), (6) за y та використавши (7), одержимо

$$\begin{aligned}
&w_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} w_{yy} + \frac{a_x(yh(t),t) + b(yh(t),t) + yh'(t)}{h(t)} w_y + \\
&\quad + \left(b_x(yh(t),t) + \frac{h'(t)}{h(t)} + c(t)\right) w + h(t) f_x(yh(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \\
&w(y,0) = h_0 \varphi'(yh_0), \qquad y \in [0,1], \\
&w_y(0,t) = \frac{h^2(t)}{a(0,t)} \left[\mu_1'(t) - \frac{b(0,t)}{h(t)} w(0,t) - c(t)\mu_1(t) - f(0,t)\right], \qquad t \in [0,T], \\
&w_y(1,t) = \frac{h^2(t)}{a(h(t),t)} \left[\mu_2'(t) - \frac{b(h(t),t) + h'(t)}{h(t)} w(1,t) - c(t)\mu_2(t) - f(h(t),t)\right], \quad t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{11}$$

Задача (11) у випадку довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $h(t)$, $p(t)$, $c(t)$ еквівалентна рівнянню

$$\begin{aligned}
w(y,t) = w_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 &\left[G_2(y,t,\eta,\tau)c(\tau) - G_{2\eta}(y,t,\eta,\tau)\frac{b(\eta h(\tau),\tau) + \eta p(\tau)}{h(\tau)}\right] \times \\
&\times w(\eta,\tau) d\eta d\tau, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T,
\end{aligned} \tag{12}$$

де $G_2(y,t,\eta,\tau)$ — функція Гріна другої крайової задачі для рівняння

$$w_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} w_{yy} + \frac{a_x(yh(t),t)}{h(t)} w_y,$$

а $w_0(y,t)$ має вигляд

$$\begin{aligned}
w_0(y,t) = h_0 \int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_0) d\eta - \int_0^t G_2(y,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau) - c(\tau)\mu_1(\tau) - f(0,\tau)) d\tau + \\
+ \int_0^t G_2(y,t,1,\tau)(\mu_2'(\tau) - c(\tau)\mu_2(\tau) - f(h(\tau),\tau)) d\tau + \\
+ \int_0^t \int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau) h(\tau) f_x(\eta h(\tau),\tau) d\eta d\tau.
\end{aligned}$$

З умови (8) одержимо

$$h(t) = \frac{\mu_3(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy}, \qquad t \in [0,T]. \tag{13}$$

Продиференціювавши умови (8) за t і використавши рівняння (5), матимемо

$$c(t) = \Bigg[\int\limits_0^1 ((1-y)h(t)(a_x(yh(t),t) - b(yh(t),t)) - a(yh(t),t))w(y,t)dy + a(0,t)w(0,t) -$$

$$-h^2(t)\int\limits_0^1 (1-y)f(yh(t),t)dy + h(t)\mu_3'(t) - \mu_4'(t)\Bigg](\mu_3(t)h(t) - \mu_4(t))^{-1}, \quad t \in [0,T], \tag{14}$$

$$p(t) = \Bigg[\int\limits_0^1 ((yh(t)\mu_3(t) - \mu_4(t))(a_x(yh(t),t) - b(yh(t),t)) +$$

$$+ \mu_3(t)a(yh(t),t))w(y,t)dy - \frac{a(0,t)\mu_4(t)}{h(t)}w(0,t) -$$

$$- \frac{(\mu_3(t)h(t) - \mu_4(t))a(h(t),t)}{h(t)}w(1,t) + \mu_4'(t)\mu_3(t) - \mu_4(t)\mu_3'(t) -$$

$$-h(t)\int\limits_0^1 (yh(t)\mu_3(t) - \mu_4(t))f(yh(t),t)dy\Bigg](\mu_2(t)(\mu_3(t)h(t) - \mu_4(t)))^{-1}, \quad t \in [0,T]. \tag{15}$$

Зауважимо, що

$$\mu_3(t)h(t) - \mu_4(t) = h^2(t)\int\limits_0^1 (1-y)v(y,t)dy.$$

Згідно з принципом максимуму [4] для розв'язку задачі (5)–(7) матимемо

$$v(y,t) \geqslant C_1 \min\{\min_{[0,h_0]} \varphi(x), \min_{[0,T]} \mu_1(t), \min_{[0,T]} \mu_2(t)\} \equiv M_1 > 0, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T.$$

Отже, $\mu_3(t)h(t) - \mu_4(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$.

Таким чином, задачу (5)–(8) зведено до еквівалентної системи інтегральних рівнянь (9), (12)–(15) з невідомими $h(t)$, $p(t)$, $c(t)$, $v(y,t)$, $w(y,t)$. Для дослідження системи застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Встановимо апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь. З (13) отримаємо

$$h(t) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \mu_3(t)}{M_1} \equiv H_1 < \infty, \qquad t \in [0,T].$$

За принципом максимуму [4] для розв'язку задачі (5)–(7) одержимо

$$v(y,t) \leqslant C_2 \max\left\{\max_{[0,h_0]} \varphi(x), \max_{[0,T]} \mu_1(t), \max_{[0,T]} \mu_2(t), \max_{[0,H_1]\times[0,T]} f(x,t)\right\} \equiv M_2 < \infty,$$

і згідно з (13) маємо

$$h(t) \geqslant \frac{\min\limits_{[0,T]} \mu_3(t)}{M_2} \equiv H_0 > 0, \qquad t \in [0,T].$$

Позначимо $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]} |w(y,t)|$. Тоді з (14), (15) отримаємо

$$|c(t)| \leqslant C_3 + C_4 W(t), \qquad |p(t)| \leqslant C_5 + C_6 W(t). \tag{16}$$

Згідно з (16) та оцінками функції Гріна [4] з (12) отримаємо нерівність

$$W(t) \leqslant C_7 + C_8 \int\limits_0^t \frac{W(\tau) + W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [5]. Таким чином, матимемо оцінку

$$W(t) \leqslant M_3 < \infty, \qquad t \in [0, T_0],$$

де T_0, $0 < T_0 < T$, визначається сталими C_7, C_8. Використавши це в (16), одержимо

$$|c(t)| \leqslant C_9 < \infty, \qquad |p(t)| \leqslant C_{10} < \infty, \qquad t \in [0, T_0].$$

Отже, апріорні оцінки розв'язків системи (9), (12)–(15) знайдено.

Подамо систему (9), (12)–(15) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (h(t), c(t), p(t), v(y,t), w(y,t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (9), (12)–(15). Позначимо $N = \{(h,c,p,v,w) \in (C[0,T_0])^3 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \colon H_0 \leqslant h(t) \leqslant H_1, |c(t)| \leqslant C_9, |p(t)| \leqslant C_{10}, M_1 \leqslant v(y,t) \leqslant M_2, |w(y,t)| \leqslant M_3\}$. Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера. Цілком неперервність операторів, що утворюють P, доводиться аналогічно як і в [5].

Тоді за теоремою Шаудера існує неперервний розв'язок $(h(t), c(t), p(t), v(y,t), w(y,t))$ системи рівнянь (9), (12)–(15), а отже, і розв'язок задачі (5)–(8) $(h,c,v) \in C^1[0,T_0] \times C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \bigcap C(\overline{Q}_{T_0})$.

Теорема 2. *Нехай* $a, b, f \in C^{2,0}([0,\infty) \times [0,T])$, $a(x,t) > 0$, $f(x,t) \geqslant 0$, $(x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$, $\varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0$, $x \in [0,\infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = \overline{1,3}$, $t \in [0,T]$. *Тоді розв'язок* $(h,c,v) \in C^1[0,T] \times C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T)$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$, *задачі* (5)–(8) *єдиний.*

Доведення. Нехай $(h_i(t), c_i(t), v_i(y,t))$, $i = 1,2$, — розв'язки задачі (5)–(8). Позначимо $\dfrac{h_i'(t)}{h_i(t)} = s_i(t)$, $i = 1,2$, $s(t) = s_1(t) - s_2(t)$, $c(t) = c_1(t) - c_2(t)$, $v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t)$. Функції $s(t)$, $c(t)$, $v(y,t)$ задовольняють задачу

$$\begin{aligned} v_t = {} & \frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{b(yh_1(t),t)}{h_1(t)} + ys_1(t)\right) v_y + c_1(t) v + \\ & + \left(\frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} - \frac{a(yh_2(t),t)}{h_2^2(t)}\right) v_{2yy} + \left(\frac{b(yh_1(t),t)}{h_1(t)} - \frac{b(yh_2(t),t)}{h_2(t)} + ys(t)\right) v_{2y} + \\ & + c(t) v_2 + f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \end{aligned} \tag{17}$$

$$v(y,0)=0, \qquad y\in[0,1], \tag{18}$$

$$v(0,t)=v(1,t)=0, \qquad t\in[0,T], \tag{19}$$

$$\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right), \qquad \int\limits_0^1 yv(y,t)dy=\mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right), \tag{20}$$

$$t\in[0,T].$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t=\frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)}v_{yy}+\left(\frac{b(yh_1(t),t)}{h_1(t)}+ys_1(t)\right)v_y+c_1(t)v$$

функцію $v(y,t)$ подамо у вигляді

$$v(y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg[\left(\frac{a(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1^2(\tau)}-\frac{a(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+$$

$$+\left(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}-\frac{b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2(\tau)}+\eta s(\tau)\right)v_{2\eta}(\eta,\tau)+c(\tau)v_2(\eta,\tau)+$$

$$+f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(\tau),\tau)\Bigg]d\eta d\tau. \tag{21}$$

Оскільки $(h_i(t),c_i(t),v_i(y,t))$, $i=1,2,$ — розв'язки задачі (5)–(8), то для $h_i'(t)$, $c_i(t)$, $i=1,2$, справджуються рівності, аналогічні (14), (15). Звідси матимемо

$$c(t)=\Bigg[\int\limits_0^1((1-y)h_1(t)(a_x(yh_1(t),t)-b(yh_1(t),t))-a(yh_1(t),t))v_y(y,t)dy+$$

$$+\int\limits_0^1((1-y)(h_1(t)(a_x(yh_1(t),t)-a_x(yh_2(t),t)-b(yh_1(t),t)+b(yh_2(t),t))+$$

$$+(h_1(t)-h_2(t))(a_x(yh_2(t),t)-b(yh_2(t),t)))-a(yh_1(t),t)+$$

$$+a(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t)dy-\int\limits_0^1(1-y)(h_1^2(t)(f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t))+$$

$$+(h_1^2(t)-h_2^2(t))f(yh_2(t),t))dy+a(0,t)v_y(0,t)+(h_1(t)-h_2(t))\mu_3'(t)\Bigg]\times$$

$$\times(\mu_3(t)h_1(t)-\mu_4(t))^{-1}-\Bigg[a(0,t)v_{2y}(0,t)+\int\limits_0^1((1-y)h_2(t)(a_x(yh_2(t),t)-$$

$$-b(yh_2(t),t))-a(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t)dy+h_2(t)\mu_3'(t)-$$

$$
- h_2^2(t)\int\limits_0^1(1-y)f(yh_2(t),t)dy-\mu_4'(t)\Bigg]\mu_3(t)(h_1(t)-h_2(t))\times
$$

$$
\times(\mu_3(t)h_1(t)-\mu_4(t))^{-1}(\mu_3(t)h_2(t)-\mu_4(t))^{-1}, \tag{22}
$$

$$
s(t)=\Bigg[\int\limits_0^1((yh_1(t)\mu_3(t)-\mu_4(t))(a_x(yh_1(t),t)-b(yh_1(t),t))+
$$

$$
+\mu_3(t)a(yh_1(t),t))v_y(y,t)dy+\int\limits_0^1((yh_1(t)\mu_3(t)-\mu_4(t))(a_x(yh_1(t),t)-
$$

$$
-a_x(yh_2(t),t)-b(yh_1(t),t)+b(yh_2(t),t))+y\mu_3(t)(h_1(t)-h_2(t))\times
$$

$$
\times(a_x(yh_2(t),t)-b(yh_2(t),t))+\mu_3(t)(a(yh_1(t),t)-a(yh_2(t),t)))v_{2y}(y,t)dy-
$$

$$
-a(0,t)\mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}v_y(0,t)+\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right)v_{2y}(0,t)\right)-\frac{\mu_3(t)h_1(t)-\mu_4(t)}{h_1(t)}\times
$$

$$
\times a(h_1(t),t)v_y(1,t)-\Bigg((\mu_3(t)h_1(t)-\mu_4(t))\Bigg(\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right)a(h_1(t),t)+
$$

$$
+\frac{1}{h_2(t)}(a(h_1(t),t)-a(h_2(t),t))\Bigg)+\frac{\mu_3(t)(h_1(t)-h_2(t))a(h_2(t),t)}{h_2(t)}\Bigg)v_{2y}(1,t)-
$$

$$
-h_1(t)\int\limits_0^1(yh_1(t)\mu_3(t)-\mu_4(t))(f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t))dy-
$$

$$
-\int\limits_0^1(y(h_1^2(t)-h_2^2(t))\mu_3(t)-(h_1(t)-h_2(t))\mu_4(t))f(yh_2(t),t)dy\Bigg]\times
$$

$$
\times(\mu_2(t)h_1(t)(\mu_3(t)h_1(t)-\mu_4(t)))^{-1}-\Bigg[\int\limits_0^1((a_x(yh_2(t),t)-b(yh_2(t),t))\times
$$

$$
\times(yh_2(t)\mu_3(t)-\mu_4(t))+\mu_3(t)a(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t)dy-
$$

$$
-\frac{(\mu_3(t)h_2(t)-\mu_4(t))a(h_2(t),t)}{h_2(t)}v_{2y}(1,t)-\frac{a(0,t)\mu_4(t)}{h_2(t)}v_{2y}(0,t)+\mu_4'(t)\mu_3(t)-
$$

$$
-\mu_4(t)\mu_3'(t)-h_2(t)\int\limits_0^1(yh_2(t)\mu_3(t)-\mu_4(t))f(yh_2(t),t)dy\Bigg]\times
$$

$$
\times(\mu_3(t)(h_1^2(t)-h_2^2(t))-\mu_4(t)(h_1(t)-h_2(t)))(\mu_2(t)h_1(t)h_2(t)\times
$$

$$
\times(\mu_3(t)h_1(t)-\mu_4(t))(\mu_3(t)h_2(t)-\mu_4(t)))^{-1}. \tag{23}
$$

Використаємо таке перетворення:

$$f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t) = y(h_1(t) - h_2(t)) \int_0^1 f_x(y(h_2(t) + \sigma(h_1(t) - h_2(t))), t)\, d\sigma. \quad (24)$$

Виразивши $h_i(t)$ через $s_i(t)$, отримаємо

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_0} \int_0^t s(\tau)\, d\tau \int_0^1 \exp\left(- \int_0^t (\sigma s_1(\tau) + (1-\sigma) s_2(\tau))\, d\tau \right) d\sigma, \quad (25)$$

де $h_1(0) = h_2(0) = h_0$.

Використавши (24), (25) і підставивши (21) в (22), (23), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно невідомих $c(t)$, $s(t)$. З єдиності розв'язків однорідних рівнянь Вольтерра другого роду випливає, що $c(t) = 0$, $s(t) = 0$, $t \in [0,T]$, а отже, $c_1(t) = c_2(t)$, $s_1(t) = s_2(t)$, $h_1(t) = h_2(t)$, $t \in [0,T]$. Звідси знаходимо, що $v_1(y,t) = v_2(y,t)$, $(y,t) \in \overline{Q}_T$, що завершує доведення теореми.

1. *Пабирівська Н. В.* Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 51–58.
2. *Cannon J. R., Lin Y., Wang S.* Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – **33**. – P. 149–163.
3. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
5. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type // Math. Studies: Monograph. Ser. – Lviv: VNTL Publishers, 2003. – Vol. 10. – 238 c.

Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів

Надійшло до редакції 31.08.2007