УДК 539.3:519.6

Э. Л. Гарт

Проекционно-итерационные модификации метода конечных элементов в краевых задачах теории упругости

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. С. Гудрамовичем)

Projective-iterative modifications of the finite-element method to solve the minimum problem in Hilbert spaces are proposed. The effective algorithm for solving the two-dimensional elastic problem of the stress-strain state of an axial loaded plate with rectangular hole, contact problems, and the three-dimensional elastic problem for a multilayer solid is developed.

Среди приближенных методов решения уравнений в нормированных пространствах важное место занимают итерационные и проекционные методы [1]. Сочетание идей этих методов нашло отражение в группах проекционно-итеративных [2], многосеточных [3] и проекционно-итерационных (ПИ) методов [1, 4, 5]. ПИ методы являются одними из эффективных численных методов решения бесконечномерных задач, о чем свидетельствует практика их применения к решению эллиптических краевых задач. Развитие этих методов и применение разработанных модификаций к решению различных классов задач теории упругости имеет важное прикладное значение.

В данной работе предлагаются теоретически обоснованные ПИ модификации методов решения задач условной минимизации функционалов в гильбертовых пространствах и приводятся результаты исследования их вычислительной эффективности при решении некоторых классов краевых задач теории упругости.

1. Пусть на некотором множестве Ω вещественного гильбертова пространства H задан ограниченный снизу функционал $F(u)$,

$$\inf_{u\in\Omega} F(u) = F^* > -\infty.$$

Поставим задачу минимизации $F(u)$ на Ω:

$$F(u) \to \inf, \qquad u \in \Omega. \tag{1}$$

Рассмотрим вариант ПИ метода решения задачи (1), основанный на применении к решению последовательности задач условной минимизации метода поточечной релаксации [6]. Аппроксимируем функционал $F(u)$ последовательностью приближенных функционалов $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ $(n = N, N+1, \ldots)$, заданных в некоторых конечномерных гильбертовых пространствах $\widetilde{H}_n$, причем $\inf\limits_{\overleftrightarrow{u}_n\in\widetilde{H}_n} \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n) = \widetilde{F}_n^* > -\infty$. Для каждого из $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ поставим задачу на $\widetilde{\Omega}_n \subset \widetilde{H}_n$

$$\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n) \to \inf, \qquad \widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n. \tag{2}$$

Пусть $\widetilde{H}_n$ — пространство векторов размерности $N = N(n)$ с евклидовой метрикой. Задав начальное приближение $\widetilde{u}_n^{(0)} = \{\widetilde{u}_{1n}^{(0)}, \ldots, \widetilde{u}_{Nn}^{(0)}\}$, построив по методу поточечной релаксации k_n приближений $\widetilde{u}_n^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, k_n)$ для функционала $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ на $\widetilde{\Omega}_n \subset \widetilde{H}_n$ и взяв последнее из них в качестве начального приближения к решению задачи минимизации функционала $\widetilde{F}_{n+1}(\widetilde{u}_{n+1})$ на множестве $\widetilde{\Omega}_{n+1}$, получим последовательность $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}$ приближений к точке минимума u^* исходного функционала на Ω: $\widetilde{u}_n^{(k+1)} = \{u_{1n}^{(k+1)}, \ldots, u_{Nn}^{(k+1)}\}$; $u_{in}^{(k+1)}$ определяются как решение неравенства

$$\widetilde{F}_n(u_{1n}^{(k+1)}, \ldots, u_{i-1,n}^{(k+1)}, u_{in}^{(k+1)}, u_{i+1,n}^{(k)}, \ldots, u_{Nn}^{(k)}) \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{F}_n(u_{1n}^{(k+1)}, \ldots, u_{i-1,n}^{(k+1)}, v_i, u_{i+1,n}^{(k)}, \ldots, u_{Nn}^{(k)}) \tag{3}$$

для всех v_i таких, что

$$(u_{1n}^{(k+1)}, \ldots, u_{i-1,n}^{(k+1)}, v_i, u_{i+1,n}^{(k)}, \ldots, u_{Nn}^{(k)}) \in \widetilde{\Omega}_n, \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$
$$\widetilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, k_n - 1;\ n = 1, 2, \ldots;\ \widetilde{u}_1^{(0)} \in \widetilde{\Omega}_1).$$

Здесь Φ_n — линейный оператор, ставящий во взаимно однозначное соответствие каждому элементу $u_n \in H_n$ элемент $\widetilde{u}_n \in \widetilde{H}_n$; Φ_n^{-1} — оператор обратного отображения; множества Ω_n и $\widetilde{\Omega}_n$ связаны соотношением $\widetilde{\Omega}_n = \Phi_n\Omega_n$.

Теорема 1. *Пусть функционалы $F(u) \in C^1(\Omega)$ и $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n) \in C^1(\widetilde{\Omega}_n)$ сильно выпуклы, причем существует число $C > 0$ такое, что $\widetilde{\chi}_n \geqslant C$, где $\widetilde{\chi}_n$ — константа сильной выпуклости $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$, и выполнено условие*

$$|\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n) - F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n)| \leqslant \widetilde{\gamma}_n \tag{4}$$

для всех $\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n$ с $\widetilde{\gamma}_n \to 0$ при $n \to \infty$; последовательность подпространств H_n предельно плотна в H, а множества Ω и $\widetilde{\Omega}_n$ связаны условием: для любого $u \in \Omega$ существует последовательность $\{\widetilde{u}_n\}$, $\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n = u$, т.е. точка u^* является (Ω_n)-аппроксимируемой [7].

Тогда последовательность $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}$, где $\widetilde{u}_n^{(k_n)}$ определяются формулами (3), сходится к точке u^* минимума $F(u)$ на Ω. При выполнении условия

$$|\widetilde{F}_n(\overline{\Phi}_n u^*) - F(u^*)| \leqslant \widetilde{\beta}_n, \qquad \widetilde{\beta}_n \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty$$

последовательность $\{\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}$ сходится к $\overline{\Phi}_n u^*$, где $\overline{\Phi}_n$ — линейный оператор, являющийся расширением Φ_n на пространство H.

2. Пусть H — некоторое вещественное сепарабельное гильбертово пространство, на котором задан ограниченный снизу функционал $F(u)$ из класса $C^1(H)$ непрерывно дифференцируемых на H функционалов, $\inf\limits_{u\in H} F(u) = F^* > -\infty$. Поставим задачу (1) минимизации $F(u)$ на $\Omega = H$. Так же, как и ранее, получим последовательность приближенных задач (2) на $\widetilde{\Omega}_n = \widetilde{H}_n$, для решения которых будем использовать итерационный метод сопряженных градиентов таким образом, что строится лишь несколько приближений $\widetilde{u}_n^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, k_n - 1, k_n \leqslant K$, K — некоторое натуральное число), последнее из которых используется в качестве начального приближения к решению следующей $(n+1)$-й задачи минимизации. В результате получим последовательность $\{\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}$:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{u}_n^{(k+1)} = \widetilde{u}_n^{(k)} - \widetilde{\alpha}_n^{(k)} p_n^{(k)}, \qquad \widetilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)} \\
&(k = 1, 2, \ldots, k_n - 1;\ n = N, N+1, \ldots;\ \widetilde{u}_N^{(0)} \in \widetilde{H}_N), \\
&\widetilde{p}_n^{(0)} = \widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(0)}), \qquad \widetilde{p}_n^{(k)} = \widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)}) - \widetilde{\beta}_n^{(k)}\widetilde{p}_n^{(k-1)} \\
&(k = 1, 2, \ldots, k_n;\ n = N, N+1, \ldots),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где величины $\widetilde{\alpha}_n^{(k)}$, $\widetilde{\beta}_n^{(k)}$ выбираются из условий

$$
\widetilde{g}_n^{(k)}(\widetilde{\alpha}_n^{(k)}) = \min_{\alpha \geqslant 0} \widetilde{g}_n^{(k)}(\alpha), \qquad \widetilde{g}_n^{(k)}(\alpha) \equiv \widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(k)} - \alpha p_n^{(k)})
\tag{6}
$$

и

$$
\widetilde{\beta}_n^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)}), \widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(k-1)}) - \widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)})}{|\widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n^{(k-1)})|^2}, & k \in I_1^n \\ 0, \qquad k \in I_2^n \end{cases},
\tag{7}
$$

а множества индексов I_1^n и I_2^n таковы, что $I_1^n \bigcup I_2^n = \{0, 1, 2, \ldots, k_n\}$, $0 \in I_2^n$. В зависимости от выбора множеств I_1^n и I_2^n можно получить различные проекционно-итерационные варианты метода сопряженных градиентов.

Предположим, что функционалы $F(u)$ и $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n)$ удовлетворяют условию близости (4) для всех $\widetilde{u}_n \in \widetilde{H}_n$ с $\widetilde{\gamma}_n \to 0$ при $n \to \infty$, причем $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \widetilde{\gamma}_n < \infty$ и условию

$$
\|\widetilde{F}_n'(\widetilde{u}_n) - \overline{\Phi}_n F'(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n)\| \leqslant \widetilde{\delta}_n \qquad \text{с} \qquad \widetilde{\delta}_n \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty,
\tag{8}
$$

последовательность подпространств H_n предельно плотна в H, а пространства H и $\widetilde{H}_n$ связаны следующим условием (A): для любого $u \in H$ существует последовательность $\{\widetilde{u}_n\}$, $\widetilde{u}_n \in \widetilde{H}_n$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n = u$.

Теорема 2. *Пусть функционалы $F(u) \in C^1(H)$, $\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n) \in C^1(\widetilde{H}_n)$ являются сильно выпуклыми, а также выполнены условие Липшица для градиента $F'(u)$*

$$
\|F'(v) - F'(u)\| \leqslant L\|v - u\|,
$$

u, $v \in H$, $L = \mathrm{const} > 0$, условие (A) и условия близости (4), (8).

Тогда при любом выборе множества индексов I_1^n, I_2^n, $0 \in I_2^n$ и любом начальном приближении $\widetilde{u}_N^{(0)} \in \widetilde{\Omega}_N$ для последовательности $\{\widetilde{u}_n^{(k_n)}\}$, удовлетворяющей условиям (5)–(7), *справедливы оценки*

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)} - u^*\|^2 \leqslant 2\eta^{-1}(\widetilde{\gamma}_n + (\widetilde{F}_n(\widetilde{u}_n^{(0)}) - F^*)q_n^{k_n}), \\
&0 \leqslant F(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}) - F(u^*) \leqslant \eta^{-1}\|F'(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)})\|^2, \\
&\|\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)} - u^*\| \leqslant \eta^{-1}\|F'_(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)})\|,
\end{aligned}
$$

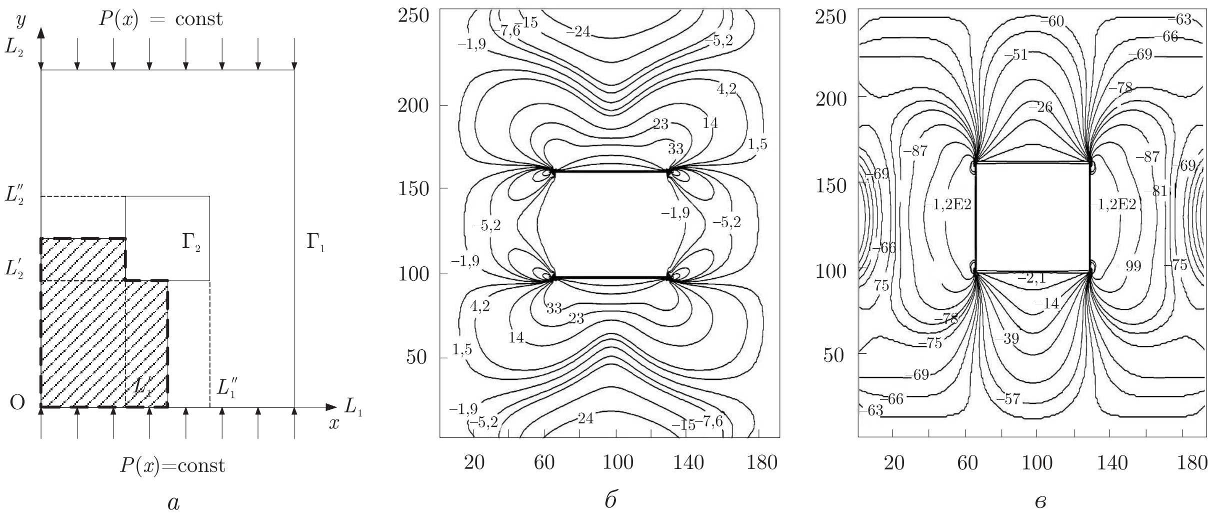

Рис. 1. Геометрия пластины и линии главных напряжений σ_1, σ_2

где

$$q_n = \frac{1-\eta^3}{2L_n(\eta^2+L_n^2)}, \qquad L_n = 2\delta_n + CL, \qquad 0 < q_n < 1,$$

η — константа сильной выпуклости функционала F.

3. Приведем результаты исследования предложенных модификаций ПИ методов при решении плоской [6], пространственной [8] и контактных [9] задач теории упругости.

Рассмотрено напряженно-деформированное состояние (НДС) упругой изотропной пластины с прямоугольным вырезом в центре (рис. 1, *а*) при равномерной осевой нагрузке. На внешней и внутренней границах Γ_1 и Γ_2 напряжения отсутствуют. Размеры пластины: $L_1 = 0{,}08$ м, $L_2 = 0{,}06$ м, $h = 0{,}0073$ м, $(L_1'' - L_1') \times (L_2'' - L_2') = 0{,}02 \times 0{,}02$ м; модуль упругости $E = 3330$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}34$.

ПИ вариант метода конечных элементов (МКЭ) был реализован на вложенных вдвое конечно-элементных сетках (13×17, 25×33, 49×65, 97×129, 193×257) из прямоугольных лагранжевых элементов первой степени ($h_{n+1} = h_n/2$) с точностью вычислений, равной 10^{-6}, при параметре релаксации $\omega = 1{,}7$. Вычисления производились на Pentium III, 933 MHz с 512 Mb оперативной памяти при нулевом начальном приближении, задаваемом на грубой сетке (13×17), решение исходной задачи ПИ вариантом МКЭ было получено за $38 + 42 + 125 + 294 + 761 = 1260$ итераций (за 49,85 с). При решении этой задачи традиционным МКЭ на одной последней сетке с нулевым начальным приближением решение было найдено за 7534 итерации (за 4 мин 35 с). При этом с точки зрения затрат машинного времени ПИ вариант МКЭ оказался более, чем в пять раз эффективнее обычного МКЭ. Численные значения компонент НДС отличаются не более 1% от полученных на основе обычного МКЭ.

Распределение главных напряжений σ_1, σ_2 показано на рис. 1, *б*, *в*, а линии равных перемещений u, v — на рис. 2. Эти распределения симметричны относительно осей Ox и Oy. Расчетные значения напряжений σ_x, σ_y, σ_{xy} подтверждают выполнение граничных условий в местах приложения внешней нагрузки с погрешностью не более 1,5%.

При рассмотрении задачи о НДС пакета упругих слоев, находящегося под действием нормально распределенной по верхней грани нагрузки, использована методика работы [8]

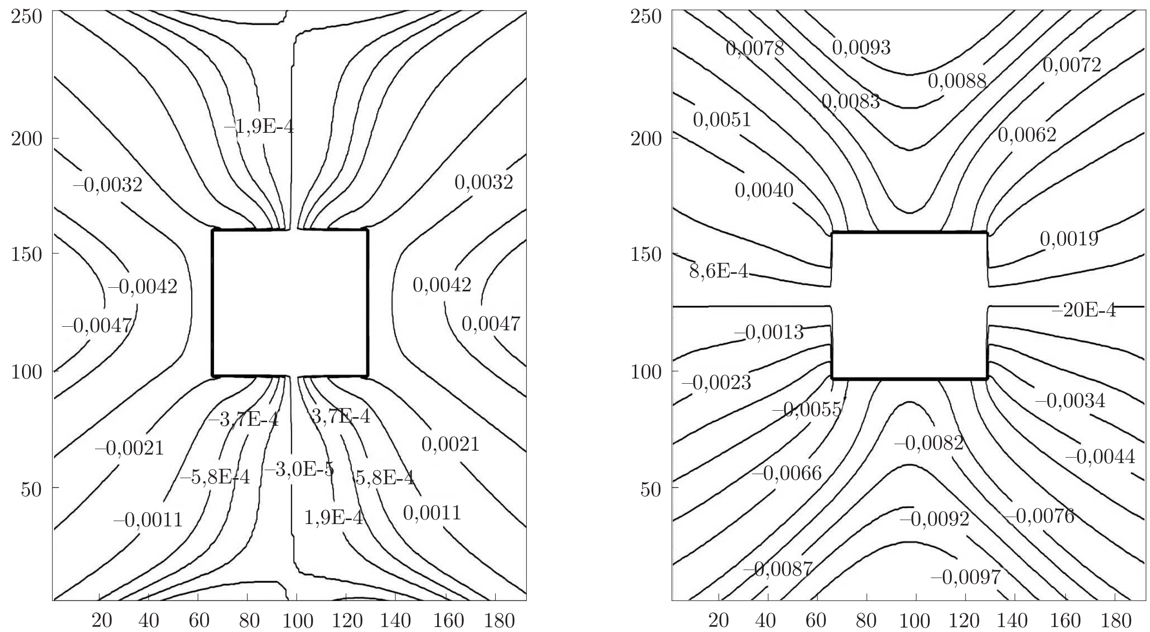

Рис. 2. Линии равных перемещений u, v

и проведено исследование эффективности ПИ варианта МКЭ на последовательности конечно-элементных сеток. Разработан комплекс компьютерных программ на Visual Fortran 6.6, предназначенный для определения полей перемещений, деформаций и напряжений в узлах сетки. Построены графические интерпретации полей перемещений для разных вариантов количества слоев в пакете с различными механическими характеристиками материалов слоев.

Для контактных задач с идеальными односторонними связями [9, 10] ПИ алгоритм, основанный на использовании методов сопряженных градиентов (СГ) и последовательной верхней релаксации (ПВР), требует более, чем в 70 и 2000 раз соответственно меньше затрат машинного времени, чем методы СГ и ПВР, применяемые непосредственно, исходя из нулевого начального приближения, для решения конечномерной задачи, имеющей $264 \cdot 10^3$ неизвестных.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1) применение ПИ варианта МКЭ к решению плоской задачи теории упругости для пластины с отверстием показало его преимущества по сравнению с традиционным МКЭ с точки зрения уменьшения вычислительных затрат (более, чем в пять раз), существенное влияние на скорость сходимости оказывает параметр релаксации ω (рекомендуемый диапазон его изменения $1{,}7 \leqslant \omega \leqslant 1{,}85$);

2) для многослойного тела экономичность ПИ варианта МКЭ относительно обычного МКЭ по затратам машинного времени составила более, чем четыре раза;

3) для контактных задач с идеальными односторонними связями ПИ модификации МКЭ не уступают многосеточному МКЭ по вычислительной эффективности и точности получаемых решений.

Следовательно, применение проекционно-итерационных модификаций МКЭ к решению указанных классов краевых задач теории упругости свидетельствует об их эффективности по сравнению с традиционным МКЭ при незначительном усложнении вычислительного алгоритма и с достаточной степенью точности, приемлемой для практики, гарантирует получение достоверных результатов. С увеличением размерности решаемых конечномерных задач эффективность проекционно-итерационных модификаций возрастает.

1. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
2. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Москва: Наука, 1973. – 576 с.
3. *Шайдуров В. В.* Многосеточные методы конечных элементов. – Москва: Мир, 1989. – 288 с.
4. *Балашова С. Д., Плаксий З. Т.* Проекционно-итерационные методы решения задач минимизации с ограничениями // Вычислит. и прикл. математика. – 1988. – **64**. – С. 3–8.
5. *Гарт Э. Л., Борисовская И. В.* Исследование вычислительной эффективности проекционно-итерационных вариантов методов конечных элементов и конечных разностей // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2004. – **2**, вип. 8. – С. 44–51.
6. *Гловинский Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – Москва: Мир, 1979. – 576 с.
7. *Kluge R.* Ein Projektions-Iterationsverfahren bei Fixpunktroblemen und Gleichungen mit monotonen Operatoren // Monatsber. Dtsch. Acad. Wiss. – 1969. – **11**, No 8–9. – S. 599–609.
8. *Кузьменко В. И.* Трехмерные контактные задачи для многослойного упругопластического пакета // Изв. АН СССР. Механика тв. тела. – 1984. – № 4. – С. 105–112.
9. *Бобылев А. А., Гарт Э. Л.* Применение многосеточного метода конечных элементов к решению контактных задач с идеальными односторонними связями // Техн. механика. – 2003. – № 1. – С. 126–134.
10. *Кравчук А. С., Нейттаанияки П.* Решение контактных задач с использованием метода граничных элементов // Прикл. математика и механика. – 2007. – **71**, вып. 2. – С. 329–339.

Днепропетровский национальный университет

Поступило в редакцию 05.11.2007