ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2008

МАТЕМАТИКА

УДК 517.96

В. В. Городецький, В. І. Мироник

Двоточкова задача для еволюційних рівнянь з псевдобесселевими операторами

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. О. Перестюком)

The correct solubility of a two-point problem for the evolution equation with pseudo-Bessel operators of infinite order in the class of boundary conditions which are generalized functions of the distribution type is established.

Останнім часом значна увага приділяється дослідженню нелокальних багатоточкових крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Це зумовлено тим, що багато задач практики моделюється крайовими задачами для рівнянь із частинними похідними з нелокальними (у тому числі періодичними) умовами (теорія фізики плазми, вологопереносу, коливання різних систем, поширення електромагнітних хвиль у прямокутних хвилеводах, зворотні задачі для рівняння теплопровідності тощо). За останні 40 років нелокальні задачі для диференціально-операторних рівнянь у різних аспектах вивчали багато дослідників (О. О. Дезін, А. М. Нахушев, В. М. Борок, М. Й. Юрчук, В. К. Романко, О. А. Самарський та ін.), виділяючи переважно випадки коректно поставлених задач. Нелокальні багатоточкові задачі для рівнянь з псевдодиференціальними операторами та багатоточкові сингулярні параболічні задачі у всьому просторі та в циліндричній області досліджені в [1–3].

У роботі [4] вивчені властивості оператора $A = F_B^{-1}[a \cdot F_B]$, де F_B, F_B^{-1} — пряме та обернене перетворення Бесселя, a — однорідний негладкий у точці 0 символ (оператор A в [4] називається псевдобесселевим оператором). Еволюційні рівняння з оператором A є природними узагальненями сингулярних параболічних рівнянь з оператором Бесселя

$$B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{d}{dx}, \qquad \nu > -\frac{1}{2},$$

який вироджується за просторовою змінною, оскільки B_ν також можна визначити за допомогою співвідношення $B_\nu\varphi = -F_B^{-1}[\xi^2 F_B[\varphi]]$, де φ — елемент простору, в якому діє перетворення Бесселя. В [4] встановлено коректну розв'язність задачі Коші для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t + Au = 0$, де A — псевдобесселевий оператор, у класі початкових умов, які є узагальненими функціями типу розподілів.

У цій роботі встановлюється коректна розв'язність двоточкової задачі для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(A)u = 0, \qquad f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k, \qquad A = F_B^{-1}[aF_B], \tag{1}$$

у випадку, коли крайова умова є узагальненою функцією скінченного порядку $\big(f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ — функція, яка задовольняє певні умови$\big)$. Досліджується структура фундаментального розв'язку такої задачі, знайдено умови, за яких розв'язок подається у вигляді згортки крайової умови та фундаментального розв'язку. Зазначимо, що рівняння (1) можна віднести до псевдодиференціального рівняння з оператором, побудованим за негладким у точці 0 символом.

1. Простори основних та узагальнених функцій. Нехай $\mathbb{R}_+^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$, $\Omega_+ = (0, T) \times \mathbb{R}_+^n$, T — фіксоване додатне число, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, $\mathcal{D}_x^k = \mathcal{D}_{x_1}^{k_1} \ldots \mathcal{D}_{x_n}^{k_n}$, якщо $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — фіксовані числа з множини $(1; +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \ldots\}$, $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — фіксовані числа з множини $\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots\right\}$; $p_{0,i} := 2\nu_i + 1$, $\gamma_{0,i} := 1 + [\gamma_i] + p_{0,i}$, $M_i(x_i) = 1 + |x_i|$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Символом $\Phi(\mathbb{R}^n)$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, які задовольняють нерівності

$$|\mathcal{D}_x^k \varphi(x)| \equiv \left| \frac{\partial^{|k|} \varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial {x_1}^{k_1} \cdots \partial {x_n}^{k_n}} \right| \leqslant \frac{c_k}{M_1(x_1)^{\gamma_{0,1} + k_1} \cdots M_n(x_n)^{\gamma_{0,n} + k_n}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n.$$

У $\Phi(\mathbb{R}^n)$ вводиться система норм за формулами

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{m=0}^{p} \sum_{|k|=m} M_1(x_1)^{\gamma_{0,1} + k_1} \cdots M_n(x_n)^{\gamma_{0,n} + k_n} |\mathcal{D}_x^k \varphi(x)| \right\},$$

$$\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n), \qquad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Використовуючи результати, одержані в [4], твердимо, що $\Phi(\mathbb{R}^n)$ — повний досконалий зліченно нормований простір. Послідовність $\{\varphi_j, j \geqslant 1\} \subset \Phi(\mathbb{R}^n)$ збігається в $\Phi(\mathbb{R}^n)$ до функції $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ тоді і лише тоді, коли вона:

1) обмежена в $\Phi(\mathbb{R}^n)$, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \qquad \exists\, c = c(p) > 0 \qquad \forall\, j \geqslant 1\colon \quad \|\varphi_j\|_p \leqslant c;$$

2) правильно збігається в $\Phi(\mathbb{R}^n)$, а саме для довільного $k \in \mathbb{Z}_+^n$ послідовність $\{\mathcal{D}_x^k(\varphi_j - \varphi),\ j \geqslant 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{R}^n$.

Символом $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ позначатимемо сукупність усіх парних за кожною змінною функцій з простору $\Phi(\mathbb{R}^n)$ з відповідною топологією. У просторі $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ визначена і є нескінченно диференційовною операція узагальненого зсуву аргументу

$$\varphi \to T_x^{\xi}(\varphi), \qquad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi \varphi\left(\sqrt{x_1^2+\xi_1^2-2x_1\xi_1\cos\omega_1}, \ldots, \sqrt{x_n^2+\xi_n^2-2x_n\xi_n\cos\omega_n}\right) \times$$

$$\times \sin^{2\nu_1}\omega_1 \cdots \sin^{2\nu_n}\omega_n d\omega_1 \cdots d\omega_n,$$

$$b_\nu = \prod_{i=1}^n b_{\nu_i}, \qquad b_{\nu_i} = \frac{\Gamma(\nu_i+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu_i+1/2)}, \qquad i \in \{1,\ldots,n\}.$$

За допомогою оператора T_x^ξ згортка двох функцій з простору $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ визначається формулою

$$(\varphi * \psi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T_x^\xi \varphi(x)\psi(\xi)\xi_1^{2\nu_1+1}\cdots\xi_n^{2\nu_n+1} d\xi_1\cdots d\xi_n, \qquad \{\varphi,\psi\} \subset \overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n),$$

при цьому $(\varphi * \psi)(x) \in \overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$.

На функціях з простору $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ визначене перетворення Бесселя:

$$\psi(\sigma) \equiv F_B[\varphi](\sigma) := \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(x) j_{\nu_1}(\sigma_1 x_1)\cdots j_{\nu_n}(\sigma_n x_n)\sigma_1^{2\nu_1+1}\cdots\sigma_n^{2\nu_n+1} d\sigma_1\cdots d\sigma_n, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n),$$

де j_{ν_i}, $i \in \{1,\ldots,n\}$, — нормована функція Бесселя. Перетворення F_B взаємно однозначно і взаємно неперервно відображає $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ на $\overset{\circ}{\Psi}(\mathbb{R}^n) := F_B[\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)]$; при цьому обернене перетворення Бесселя F_B^{-1} визначається так:

$$\varphi(x) = F_B^{-1}[\psi](x) = c_\nu \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \psi(\sigma) j_{\nu_1}(\sigma_1 x_1)\cdots j_{\nu_n}(\sigma_n x_n)\sigma_1^{2\nu_1+1}\cdots\sigma_n^{2\nu_n+1} d\sigma_1\cdots d\sigma_n,$$

де

$$c_\nu = c_{\nu_1}\cdots c_{\nu_n}, \qquad c_{\nu_i} = (2^{2\nu_i}\Gamma^2(\nu_i+1))^{-1}, \qquad i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Символом $(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Оскільки в просторі $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $g \in (\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))'$ з основною функцією задамо формулою

$$(g * \varphi)(x) = \langle g_\xi, T_x^\xi \varphi(x)\rangle \equiv \langle g_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi)\rangle, \qquad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$$

(g_ξ позначає дію функціонала g за змінною ξ); при цьому $g * \varphi$ є нескінченно диференційовною функцією, бо операція узагальненого зсуву аргументу нескінченно диференційовна в просторі $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$.

2. Псевдобесселевий оператор нескінченного порядку. Нехай $a_1(x_1), \dots, a_n(x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, — невід'ємні, неперервні, парні на $\mathbb{R}$ функції, однорідні порядку $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ відповідно, які задовольняють такі умови:

1) a_i — нескінченно диференційовна при $x_i \neq 0$ функція, $i \in \{1, \dots, n\}$;

2) похідні функції a_i задовольняють умову

$$\forall k_i \in \mathbb{N} \quad \exists c_{k_i} > 0 \quad \forall x_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\colon |\mathcal{D}_{x_i}^{k_i} a_i(x_i)| \leqslant c_{k_i} |x_i|^{\gamma_i - k_i}, \qquad i \in \{1, \dots, n\};$$

3) існують сталі $c'_{0,i}$, $\widetilde{c}_{0,i} > 0$, $\delta_i \geqslant \gamma_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$ такі, що

$$c'_{0,i} |x_i|^{\gamma_i} \leqslant a_i(x_i) \leqslant \widetilde{c}_{0,i}(1 + |x_i|^{\delta_i}), \qquad x_i \in \mathbb{R}, \qquad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Тоді, як відзначено в роботі [4], у просторі $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ визначений, є лінійним і неперервним псевдобесселевий оператор

$$A = F_B^{-1}[a_1(\xi_1) \dots a_n(\xi_n) F_B].$$

Нехай

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k x^k \equiv \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} c_k x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}, \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Введемо позначення

$$\psi(x) \equiv (f(A)\varphi)(x) := \sum_{|k|=0} c_k (A^k \varphi)(x), \qquad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n),$$

де

$$A^k \varphi = F_B^{-1}[a_1^{k_1}(\xi_1) \cdots a_n^{k_n}(\xi_n) F_B[\varphi]], \qquad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n).$$

Якщо при цьому $\psi \in \overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, то говоритимемо, що в просторі $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ задано псевдобесселевий оператор нескінченного порядку $f(A) := A_f$. Сформулюємо обмеження на функцію f, за яких у просторі $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ оператор $f(A)$ є неперервним.

Теорема 1. *Нехай функція f допускає аналітичне продовження в $\mathbb{C}^n$ і*

А) $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ $\exists b_\alpha > 0$ $\exists p_{\alpha_1} > 0, \dots, p_{\alpha_n} > 0$ $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $|\mathcal{D}_x^\alpha f(x)| \leqslant b_\alpha (1 + |x_1|)^{p_{\alpha_1}} \cdots (1 + |x_n|)^{p_{\alpha_n}}$;

Б) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists c_{\varepsilon > 0}$ $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$: $|f(z)| \leqslant$ $\leqslant c_\varepsilon (1 + |x_1|)^{p_0} \cdots (1 + |x_n|)^{p_0} \exp\{\varepsilon(|y_1|^{1/[\delta_1]} + \dots + |y_n|^{1/[\delta_n]})\}$ ($\delta_i \geqslant \gamma_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$ — сталі з умови 3, $p_0 > 0$ — стала з умови А). Тоді в просторі $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ визначений і є неперервним оператор $f(A)$; при цьому оператор $f(A)$ діє на основну функцію за формулою

$$f(A)\varphi = F_B^{-1}[f(a) F_B[\varphi]], \qquad f(a) = f(a_1, \dots, a_n).$$

Надалі вважатимемо, що функція f, крім умов A, $Б$, задовольняє ще умову

$$\exists\, d_0 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\colon \quad f(x) \geqslant d_0 \|x\|, \quad f(0) = 0.$$

3. Основні результати. Розглянемо двоточкову задачу (задачу Діріхле)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_f u = 0, \qquad (t,x) \in \Omega_+, \tag{2}$$

$$\mu_1 u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_2 u(t,\cdot)|_{t=T} = \varphi, \qquad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi} (\mathbb{R}^n) \tag{3}$$

(μ_1, μ_2 — фіксовані параметри; $\mu_1 > \mu_2 > 0$). Класичний розв'язок $u \in C^1((0,T), \overset{\circ}{\Phi} (\mathbb{R}^n))$ задачі (2), (3) має вигляд

$$u(t,x) = \varphi(x) * G(t,T,x), \qquad (t,x) \in \Omega_+,$$

де

$$G(t,T,x) = F_B^{-1}\left[\frac{\exp\{-tf(a(\sigma))\}}{\mu_1 - \mu_2 \exp\{-Tf(a(\sigma))\}}\right](x),$$

$*$ — згортка в просторі $\overset{\circ}{\Phi} (\mathbb{R}^n)$. Зазначимо, що G — диференційовна за t і нескінченно диференційовна за x функція, $G(t,T,\cdot) \in \overset{\circ}{\Phi} (\mathbb{R}^n)$ при кожному $t \in (0,T)$.

Оскільки

$$(\mu_1 - \mu_2 \exp\{-Tf(a(\sigma))\})^{-1} = \mu_2^{-1}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - \exp\{-Tf(a(\sigma))\}\right)^{-1} =$$

$$= \mu_2^{-1}\mu^{-1}(1 - \mu^{-1}\exp\{-Tf(a(\sigma))\})^{-1} = \mu_2^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\exp\{-kTf(a(\sigma))\},$$

де $\mu = \mu_1/\mu_2 > 1$, то

$$G(t,T,x) = \mu_2^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\Gamma(t+kT,x), \qquad (t,x) \in \Omega_+, \tag{4}$$

де

$$\Gamma(t+kT,x) = c_\nu \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-(t+kT)f(a(\sigma))} j_{\nu_1}(x_1\sigma_1)\cdots j_{\nu_n}(x_n\sigma_n)\sigma_1^{2\nu_1+1}\cdots\sigma_n^{2\nu_n+1}d\sigma_1\cdots d\sigma_n,$$

$\Gamma(t,x)$ — фундаментальний розв'язок рівняння (2).

Лема 1. *Правильними є нерівності*

$$|\mathcal{D}_x^m\Gamma(t,x)| \equiv \left|\frac{\partial^{|m|}\Gamma(t,x)}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}\right| \leqslant c_m t^{-(\omega_1/\gamma_1+\dots+\omega_{m_n}/\gamma_n)}\prod_{i=1}^{n}(1+|x_i|)^{-(m_i+\gamma_{0,i})},$$
$$(t,x) \in \Omega_+, \qquad m = (m_1,\dots,m_n) \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{5}$$

$\omega_{m_i} = (\delta_i\widetilde{p}_{m_i} + \gamma_i)\widetilde{s}_{m_i}$, $\widetilde{s}_{m_i} = n_i + 2 + [\gamma_i] + m_i$, $n_i + 1/2 := \nu_i$, $\widetilde{p}_{m_i} = \max\{p_{\widetilde{s}_0}, p_{\widetilde{s}_1},\dots,p_{\widetilde{s}_{m_i}}\}$, $i \in \{1,\dots,n\}$, *де* $p_{\widetilde{s}_0}, p_{\widetilde{s}_1},\dots,p_{\widetilde{s}_{m_i}}$ — *сталі з умови А, яку задовольняє функція* f, *стала* c_m *не залежить від* t.

Із оцінок (5) та рівності (4) випливають наведені вище властивості функції G. Урахувавши співвідношення

$$\frac{\exp\{-tf(a(\sigma))\}}{\mu_1-\mu_2\exp\{-Tf(a(\sigma))\}}=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}G(t,T,x)j_{\nu_1}(x_1\sigma_1)\cdots j_{\nu_n}(x_n\sigma_n)x_1^{2\nu_1+1}\cdots x_n^{2\nu_n+1}dx,$$

а також те, що $a_i(0)=0$, $j_{\nu_i}(0)=1$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $f(0)=0$, прийдемо до рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}G(t,T,x)x_1^{2\nu_1+1}\cdots x_n^{2\nu_n+1}dx=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}.$$

Надалі функцію G називатимемо фундаментальним розв'язком задачі Діріхле (ФРЗД). Наведемо ще деякі властивості функції G.

Лема 2. $G(t,T,\cdot)\to\dfrac{\delta}{\mu_1-\mu_2}$ *при* $t\to+0$ *у просторі* $(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))'$; $G(t,T,\cdot)\to\dfrac{\delta}{\mu_1-\mu_2}$ *при* $t\to T-0$ *у просторі* $(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))'$ *(тут* δ *— дельта-функція Дірака).*

Лема 3. *Функція* $G(t,T,\cdot)$, $t\in(0,T)$, *як абстрактна функція параметра* t *із значеннями в просторі* $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, *диференційовна за* t.

Оскільки $G(t,T,\cdot)\in\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ при кожному $t\in(0,T)$, то має зміст згортка $\varphi*G(t,T,\cdot)$ у випадку, коли φ є узагальненою функцією з простору $(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))'$; при цьому з леми 3 випливає співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi*G(t,T,\cdot))=\varphi*\frac{\partial}{\partial t}G(t,T,\cdot),\qquad \varphi\in(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))'.$$

Лема 4. *Нехай*

$$\omega(t,x)=\varphi*G(t,T,x),\quad \varphi\in(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))',\qquad (t,x)\in\Omega_+.$$

Тоді граничні співвідношення

$$\omega(t,\cdot)\underset{t\to+0}{\to}\frac{\varphi}{\mu_1-\mu_2},\qquad \omega(t,\cdot)\underset{t\to T-0}{\to}\frac{\varphi}{\mu_1-\mu_2}$$

виконуються в просторі $(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))'$.

Ці властивості є наслідками властивостей функції G (лема 2) та властивості неперервності операції згортки в просторі $(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))'$ (роль одиниці виконує δ-функція Дірака).

Символом $(\overset{\circ}{\Phi}_*(\mathbb{R}^n))'$ позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з простору $(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))'$, які є згортувачами в просторі $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, тобто

$$(\overset{\circ}{\Phi}_*(\mathbb{R}^n))'=\{\varphi\in(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))'\colon \varphi*\psi\in\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n),\ \forall\psi\in\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Отже, якщо $\varphi\in(\overset{\circ}{\Phi}_*(\mathbb{R}^n))'$, то $\varphi*G(t,T,\cdot)\in\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$. Властивості функції G, встановлені в лемах 2, 4, дозволяють ставити двоточкову задачу (задачу Діріхле) для рівняння (2) так: знайти розв'язок $u\in C^1((0,T),\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))$ рівняння (2), який задовольняє крайову умову

$$\mu_1u(t,\cdot)|_{t=0}-\mu_2u(t,\cdot)|_{t=T}=\varphi,\qquad \varphi\in(\overset{\circ}{\Phi}_*(\mathbb{R}^n))',\tag{6}$$

у тому сенсі, що

$$\mu_1 \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \mu_2 \lim_{t\to T-0} u(t,\cdot) = \varphi,$$

де границі розглядаються в просторі $(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))'$. Правильним є таке твердження.

Теорема 2. *Задача* (2), (6) *коректно розв'язна в класі узагальнених функцій* $(\overset{\circ}{\Phi}_*(\mathbb{R}^n))'$. *Розв'язок подається у вигляді згортки*

$$u(t,x) = (\varphi * G)(t,x), \qquad \varphi \in (\overset{\circ}{\Phi}_*(\mathbb{R}^n))', \qquad (t,x) \in \Omega_+,$$

де G *— ФРЗД рівняння* (2).

1. *Пташник Б. И., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
2. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
3. *Городецький В. В., Дрінь Я. М.* Задача Діріхле для одного класу еволюційних рівнянь // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. 336–337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 63–78.
4. *Городецький В. В., Ленюк О. М.* Еволюційні рівняння з псевдобесселевими операторами // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 11–15.

*Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича*

Надійшло до редакції 04.10.2007

УДК 514

В. А. Горькавый

О псевдосферических конгруэнциях в пространствах постоянной кривизны

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Geometric Bäcklund transformations of pseudo-spherical surfaces in n-dimensional spaces of constant curvature are studied. An analog of the classical theorems by Bäcklund and Tenenblat–Terng is proved.

Работа посвящена изучению псевдосферических геодезических конгруэнций в n-мерном пространстве постоянной секционной кривизны N^n. Следуя классическому определению, геодезической конгруэнцией в N^n будем называть диффеоморфизм $\psi\colon M^2 \to \widetilde{M}^2$ регулярных поверхностей M^2, $\widetilde{M}^2$ в N^n, обладающий *свойством двойного касания*: для каждой точки $P \in M^2$ существует единственная геодезическая объемлющего пространства, проходящая через точки P и $\psi(P) = \widetilde{P} \in \widetilde{M}^2$, которая касается как поверхности M^2 в точке P, так и поверхности $\widetilde{M}^2$ в точке $\widetilde{P}$ (ср. [1, с. 85]).