В случае, когда N^n представляет собой пространство Лобачевского, мы рассматриваем реализацию N^n как гиперсферы в $(n+1)$-мерном пространстве Минковского: все выкладки сохраняются с соответствующей заменой стандартных тригонометрических функций их гиперболическими аналогами. Евклидов случай рассматривался в [4] при $n = 4$, приведенное там доказательство допускает прямое обобщение для $n \geqslant 4$; формально евклидовы формулы получаются из выписанных выше соответствующих сферических формул предельным переходом при $R \to \infty$.

1. *Tenenblat K.* Transformations of manifolds and applications to differential equations. – London: Longman, 1998. – 208 p.
2. *Аминов Ю. А.* Геометрия подмногообразий. – Київ: Наук. думка, 2002. – 468 с.
3. *Aminov Yu., Sym A.* On Bianchi and Bäcklund transformations of two-dimensional surfaces in E^4 // Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2000. – **3**, No 1. – P. 75–89.
4. *Gorkavyy V.* On pseudo-spherical congruences in E^4 // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2003. – **10**, вып. 4. – С. 498–504.
5. *Горькавый В. А.* Конгруэнции Бьянки двумерных поверхностей в E^4 // Мат. сб. – 2005. – **196**, вып. 10. – С. 79–102.
6. *Gorkavyy V.* On pseudo-spherical surfaces in E^4 with Grassmann image of prescribed type // Журн. мат. физики, анализа, геометрии. – 2006. – **2**, вып. 2. – С. 138–148.
7. *Масальцев Л. А.* Бикасательное преобразование Бьянки // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 2005. – **8**. – С. 83–98.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 02.11.2007

УДК 517.9

Н. З. Дільна, В. А. Пилипенко, А. М. Ронто

Деякі умови однозначної розв'язності нелокальної крайової задачі для лінійних функціонально-диференціальних рівнянь

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

General conditions for the unique solvability of a nonlocal boundary-value problem for systems of linear functional differential equations are obtained.

У роботі досліджується питання існування та єдиності розв'язку нелокальної крайової задачі для систем лінійних функціонально-диференціальних рівнянь загального виду. Розглядається система функціонально-диференціальних рівнянь

$$u_k'(t) = (l_k u)(t) + q_k(t), \qquad t \in [a, b], \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

із нелокальними крайовими умовами

$$u_k(a) = h_k(u), \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

де $-\infty < a < b < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, $l_k\colon D([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R})$, $k = 1,2,\dots,n$, — лінійні оператори, $\{q_k \mid k = 1,2,\dots,n\} \subset L_1([a,b],\mathbb{R})$ — задані функції, а $h_k\colon D([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\dots,n$, — неперервні лінійні функціонали.

Означення 1. Розв'язком задачі (1), (2), згідно із загальною концепцією сучасної теорії функціонально-диференціальних рівнянь (див., напр., [1]), називаємо абсолютно неперервну вектор-функцію $u = (u_k)_{k=1}^n\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, для якої майже скрізь на $[a,b]$ справджується рівність (1) і яка має властивість (2).

Варто відзначити, що на відміну від випадку, розглянутого в [2, 3], система (1) включає, зокрема, системи нейтрального типу, оскільки права сторона може містити члени з похідними. Метою даної роботи є встановлення загальних умов однозначної розв'язності задачі (1), (2) за припущення, що лінійні оператори l_k, $k = 1,2,\dots,n$, задані в (1), можна оцінити деякими іншими лінійними операторами, які породжують однозначно розв'язні початкові задачі із позитивними операторами. Нижченаведене означення дає точне формулювання вищезгаданої властивості.

Означення 2. Вважатимемо, що лінійний оператор $l = (l_k)_{k=1}^n\colon D([a,b],\mathbb{R}^n) \to$ $\to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ належить множині $\mathcal{S}_{a,h}([a,b],\mathbb{R}^n)$, якщо крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок $u = (u_k)_{k=1}^n$ при довільних $\{q_k \mid k = 1,2,\dots,n\} \subset L_1([a,b],\mathbb{R})$ та, більше того, розв'язок задачі (1), (2) має властивість

$$\min_{t\in[a,b]} u_k(t) \geqslant 0, \qquad k = 1,2,\dots,n, \tag{3}$$

якщо функції q_k, $k = 1,2,\dots,n$, в (1) невід'ємні майже всюди на $[a,b]$.

Зазначимо, що $\mathcal{S}_{a,h}([a,b],\mathbb{R})$ містить множину $\widetilde{V}_{ab}^{+}(h)$, введену до розгляду в роботі [4], де встановлено ефективні умови, достатні для включення $l \in \widetilde{V}_{ab}^{+}(h)$ у випадку, коли лінійний оператор l допускає неперервне розширення на простір усіх неперервних функцій.

Далі використовуються такі позначення: $\mathbb{R} := (-\infty,\infty)$, $\mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$, $\|x\| :=$ $= \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$ для $x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$; $\operatorname{mes} A$ — міра Лебега множини $A \subset \mathbb{R}$; $L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ — банахів простір усіх вектор-функцій $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, інтегровних за Лебегом, зі стандартною нормою

$$L_1([a,b],\mathbb{R}^n) \ni u \longmapsto \int\limits_a^b \|u(\xi)\|\,d\xi;$$

$D([a,b],\mathbb{R}^n)$ — банахів простір абсолютно неперервних функцій $[a,b] \to \mathbb{R}^n$ із нормою

$$D([a,b],\mathbb{R}^n) \ni u \longmapsto \|u(a)\| + \int\limits_a^b \|u'(\xi)\|\,d\xi.$$

Якщо $h_k\colon D([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\dots,n$, — деякі функціонали, то символом $D_h([a,b],\mathbb{R}^n)$ позначаємо множину всіх вектор-функцій $u = (u_k)_{k=1}^n$ з $D([a,b],\mathbb{R}^n)$, для яких справджуються рівності $u_k(a) = h_k(u)$, $k = 1,2,\dots,n$.

Нарешті, множини $D_{h,1}([a,b],\mathbb{R}^n)$ і $D_{h,2}([a,b],\mathbb{R}^n)$ задаються формулами

$$D_{h,1}([a,b],\mathbb{R}^n) := \Big\{u = (u_k)_{k=1}^n \in D_h([a,b],\mathbb{R}^n) \mid \min_{\xi\in[a,b]} u_k(\xi) \geqslant 0 \text{ для всіх } k = 1,2,\dots,n\Big\}$$

та

$$D_{h,2}([a,b],\mathbb{R}^n) := \Big\{ u = (u_k)_{k=1}^n \in D_h([a,b],\mathbb{R}^n) \mid \min_{\xi\in[a,b]} u_k(\xi) \geqslant 0 \text{ і } \operatorname*{vrai\,min}_{\xi\in[a,b]} u_k'(\xi) \geqslant 0$$
$$\text{для всіх } k = 1,2,\ldots,n \Big\}.$$

Теорема 1. *Припустимо, що існують лінійні оператори* $p_i = (p_{ik})_{k=1}^n \colon D([a,b],\mathbb{R}^n) \to \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$, $i = 0,1$, *для яких виконуються включення*

$$p_1 \in \mathcal{S}_{a,h}([a,b],\mathbb{R}^n), \qquad p_0 + p_1 \in \mathcal{S}_{a,h}([a,b],\mathbb{R}^n), \tag{4}$$

і, крім того, при довільній вектор-функції $u = (u_k)_{k=1}^n$ *з множини* $D_{h,1}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *справджуються нерівності*

$$|(l_k u)(t) - (p_{1k}u)(t)| \leqslant (p_{0k}u)(t), \qquad t\in[a,b], \qquad k = 1,2,\ldots,n. \tag{5}$$

Тоді нелокальна крайова задача (1), (2) *є однозначно розв'язною при довільних функціях* $\{q_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset L_1([a,b],\mathbb{R})$.

Означення 3. Лінійний оператор $l = (l_k)_{k=1}^n \colon D([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ назвемо таким, що має додатне звуження на множину $D_h([a,b],\mathbb{R}^n)$, якщо

$$\operatorname*{vrai\,min}_{t\in[a,b]} (l_k u)(t) \geqslant 0, \qquad k = 1,2,\ldots,n, \tag{6}$$

для всіх $u = (u_k)_{k=1}^n$ з $D_{h,1}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2. *Нехай існують деякі лінійні оператори* $g_i = (g_{ik})_{k=1}^n \colon D([a,b],\mathbb{R}^n) \to \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$, $i = 0,1$, *які мають додатне звуження на* $D_h([a,b],\mathbb{R}^n)$, *при деякому* $\theta \in (0,1)$ *справджують включення*

$$g_0 + (1-2\theta)g_1 \in \mathcal{S}_{a,h}([a,b],\mathbb{R}^n), \qquad -\theta g_1 \in \mathcal{S}_{a,h}([a,b],\mathbb{R}^n) \tag{7}$$

і, крім цього, є такими, що

$$|(l_k u)(t) + (g_{1k}u)(t)| \leqslant (g_{0k}u)(t), \qquad t\in[a,b], \qquad k = 1,2,\ldots,n, \tag{8}$$

для довільної функції $u = (u_k)_{k=1}^n$ *з* $D_{h,1}([a,b],\mathbb{R}^n)$. *Тоді задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок при довільних* $\{q_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset L_1([a,b],\mathbb{R})$.

Доведення. З припущення (8) та позитивності оператора $g_1|_{D_h([a,b],\mathbb{R}^n)}$ випливає, що при довільних u з $D_{h,1}([a,b],\mathbb{R}^n)$ справедливі співвідношення

$$|(l_k u)(t) + \theta(g_{1k}u)(t)| = |(l_k u)(t) + (g_{1k}u)(t) - (1-\theta)(g_{1k}u)(t)| \leqslant$$
$$\leqslant (g_{0k}u)(t) + |(1-\theta)(g_{1k}u)(t)| = (g_{0k}u)(t) + (1-\theta)(g_{1k}u)(t),$$
$$t\in[a,b], \qquad k = 1,2,\ldots,n.$$

Це означає, що оператор l допускає оцінки (5) з операторами p_0 і p_1, визначеними рівностями

$$p_0 := g_0 + (1-\theta)l_1, \qquad p_1 := -\theta g_1. \tag{9}$$

Беручи до уваги припущення (7) і (8), приходимо до висновку, що оператори $p_i \colon D([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$, $i = 0,1$, задані формулами (9), задовольняють умови (4) та (5) теореми 1.

Тепер залишається лише зауважити, що припущення (7) забезпечують включення (4) для операторів (9). Застосовуючи теорему 1, встановлюємо справедливість даного твердження.

Слід зазначити, що припущення (7) у теоремі 1 не можна замінити жодною з пар умов

$$(1-\varepsilon)(g_0 + (1-2\theta)g_1) \in \mathcal{S}_{a,h}([a,b],\mathbb{R}^n), \qquad -\theta g_1 \in \mathcal{S}_{a,h}([a,b],\mathbb{R}^n) \tag{10}$$

та

$$g_0 + (1-2\theta)g_1 \in \mathcal{S}_{a,h}([a,b],\mathbb{R}^n), \qquad -(1-\varepsilon)\theta g_1 \in \mathcal{S}_{a,h}([a,b],\mathbb{R}^n), \tag{11}$$

яким би малим не було додатне число ε. Для того щоб у цьому переконатися, достатньо розглянути такий приклад.

Приклад. Зафіксуємо $\varepsilon \in [0,1)$ та розглянемо однорідну задачу Коші

$$u_1(a) = 0, \tag{12}$$

$$u_2(a) = 0 \tag{13}$$

для системи рівнянь

$$u_1'(t) = \frac{1}{2(b-a)}(u_1(b) - u_2(b)), \tag{14}$$

$$u_2'(t) = -\frac{1}{2(b-a)}(u_1(b) - u_2(b)), \qquad t \in [a,b]. \tag{15}$$

Очевидно, що (12)–(15) є частковим випадком задачі (1), (2), де $n = 2$, $q_1 = q_2 = 0$, оператори $l_i \colon D([a,b],\mathbb{R}^2) \to L_1([a,b],\mathbb{R})$, $i = 1,2$, задано формулами

$$(l_i u)(t) = \frac{(-1)^{i+1}(1-\varepsilon)}{2(b-a)}[u_1(b) - u_2(b)], \qquad t \in [a,b], \qquad i = 1,2,$$

а $h_1 = h_2 = 0$.

Легко бачити, що задача (12)–(15) має сім'ю розв'язків

$$u_i(t) = \lambda(-1)^{i+1}(t-a), \qquad t \in [a,b], \qquad i = 1,2,$$

де λ — довільне дійсне число. Однак умова (10) у цьому випадку справджується для всіх $\varepsilon \in (0,1)$ при $g_1 := 0$ і

$$g_0 u := \frac{1}{2(b-a)}\begin{pmatrix} u_1(b) + u_2(b) \\ u_1(b) + u_2(b) \end{pmatrix},$$

оскільки однорідна початкова задача (12), (13) для системи рівнянь

$$u_1'(t) = \frac{1-\varepsilon}{2(b-a)}(u_1(b) + u_2(b)) + q_1(t),$$

$$u_2'(t) = \frac{1-\varepsilon}{2(b-a)}(u_1(b) + u_2(b)) + q_2(t), \qquad t \in [a,b],$$

як неважко показати, має єдиний розв'язок при довільних $q_i \in L_1([a,b],\mathbb{R})$, $i = 1,2$, і цей розв'язок є невід'ємним при невід'ємних q_i, $i = 1,2$.

Аналогічно можна пересвідчитись у тому, що твердження теореми 2 втрачає силу після заміни співвідношення (7) умовою (11) при додатному ε. Для цього можна скористатися, зокрема, прикладом 6.2 з роботи [3].

Наслідок. *Нехай можна вказати лінійні оператори* $g_i = (g_{ik})_{k=1}^n \colon D([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$, $i = 0,1$, *які мають додатне звуження на* $D_h([a,b],\mathbb{R}^n)$, *при кожній функції* $u = (u_k)_{k=1}^n$ *з множини* $D_{h,1}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *справджують співвідношення* (8) *та є такими, що має місце одна з таких пар умов:*

$$g_0 \in \mathcal{S}_{a,h}([a,b],\mathbb{R}^n), \qquad -\frac{1}{2}g_1 \in \mathcal{S}_{a,h}([a,b],\mathbb{R}^n), \tag{16a}$$

$$g_0 + \frac{1}{2}g_1 \in \mathcal{S}_{a,h}([a,b],\mathbb{R}^n), \qquad -\frac{1}{4}g_1 \in \mathcal{S}_{a,h}([a,b],\mathbb{R}^n). \tag{16b}$$

Тоді нелокальна крайова задача (1), (2) *має єдиний розв'язок для довільних* $\{q_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset L_1([a,b],\mathbb{R})$.

Доведення. Потрібне твердження випливає безпосередньо з теореми 2 при $\theta = 1/2$ (випадок умови (16a)) та $\theta = 1/4$ (випадок умови (16b)).

Роботу виконано за часткової підтримки Президії НАН України (грант № 0108U004117), ДФФД (грант № 0107U003322), AS CR (Institutional Research Plan № AV0Z10190503) та GA CR (Grant № 201/06/0254).

1. *Azbelev N., Maksimov V., Rakhmatullina L.* Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations. – Atlanta, GA: World Federation Publishers Company, 1995. – Vol. 3: Advanced Series in Mathematical Science and Engineering. – 172 p.
2. *Hakl R., Lomtatidze A., Puza B.* On a boundary value problem for first-order scalar functional differential equations // Nonlinear Anal. – 2003. – **53**, No 3–4. – P. 391–405.
3. *Sremr J.* On the Cauchy type problem for systems of functional differential equations // Ibid. – 2007. – **67**, No 12. – P. 3240–3260.
4. *Lomtatidze A., Oplustil Z.* On nonnegative solutions of a certain boundary value problem for first order linear functional differential equations // Proc. of the 7th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations. – Vol. 7: Proc. Colloq. Qual. Theory Differ. Equ. // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Szeged. – 2004. – No 16. – 21 p. (electronic).

Інститут математики НАН України, Київ
НТУ України "Київський політехнічний інститут"
Інститут математики АН Чеської Республіки, Брно

Надійшло до редакції 19.10.2007