



УДК 539.3:533.6+517.968:519.6

© 2008

И. Ю. Кононенко, Е. А. Стрельникова

Математическая модель гидроупругих колебаний составных оболочек, частично заполненных жидкостью

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины И. И. Залобовским)

A mathematical model of hydroelastic vibrations for partially filled compound shells of revolution is developed. The shell equilibrium equation and the Neumann problem are considered simultaneously to determine the fluid pressure upon the shell. The 2-dimensional Neumann problem is reduced to a 1-dimensional hypersingular integral equation. A method of discrete singularities is proposed for the numerical investigation of the derived integral equation.

1. Постановка задачи. Изучению гидроупругих колебаний оболочек, содержащих жидкость, посвящено большое число публикаций, например, [1–4]. Рассмотрим задачу о гидроупругих колебаниях оболочки вращения, составленной из произвольного набора цилиндрических, конических и сферических поверхностей. Оболочка частично заполнена идеальной несжимаемой жидкостью и совершает малые колебания, индуцированные внешним воздействием. Один край оболочки жестко закреплен, второй — свободен.

В отличие от существующих подходов в данной работе рассматриваемая задача сводится к решению гиперсингулярного уравнения (ГСИУ). Это позволяет построить более эффективный и устойчивый алгоритм численной реализации, чем, например, в работах [3, 5]. В рассматриваемом случае поверхность вращения $S = S_0 \cup \sigma$, S_0 — срединная поверхность той части оболочки, которая контактирует с жидкостью, σ — свободная поверхность колеблющейся жидкости (рис. 1). Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) таким образом, чтобы ось z совпадала с осью симметрии оболочки. Выберем в качестве криволинейных координат длину дуги образующей l , полярный угол φ и γ . Координатой γ какой-либо точки является расстояние от этой точки до поверхности S_0 , взятое с соответствующим знаком: со знаком плюс, если точка расположена с внешней стороны от поверхности S_0 , и со знаком минус, если находится внутри этой поверхности. Обозначим L образующую поверхности, $s = s(l)$ — радиус сечения срединной поверхности оболочки плоскостью, перпендикулярной к оси z .

Уравнения движения оболочки запишем в операторной форме:

$$(L\vec{U}) + (M\vec{U}) = P, \quad (1)$$

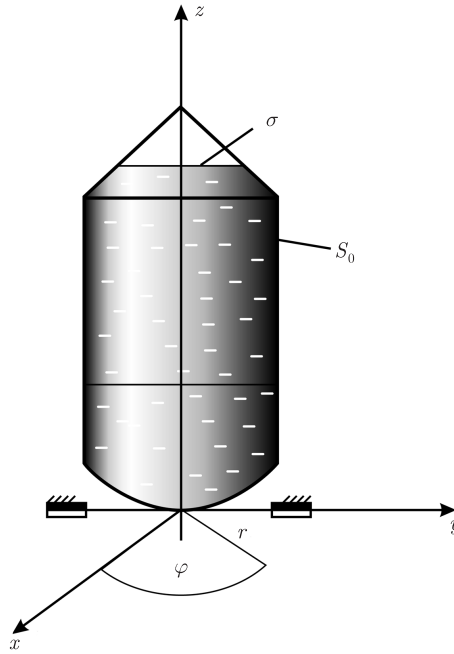


Рис. 1. Оболочка, состоящая из сферической, цилиндрической и конической частей

где L , M — операторы упругих и массовых сил соответственно; $\vec{U} = (u, v, w)$ — вектор перемещений оболочки; P — давление жидкости на смачиваемую поверхность оболочки.

Предположим, что собственные формы колебаний составной оболочки в жидкости представляют собой линейную комбинацию собственных форм колебаний оболочки в вакууме:

$$\vec{U} = \sum_{k=1}^N a_k \vec{U}_k; \quad \vec{U}_k = (u_k, v_k, w_k).$$

По известным \vec{U}_k можно построить функции p_k , т.е. считаем, что $P = \sum_{k=1}^N b_k p_k$. Собственные формы колебаний \vec{U}_k и давление p_k раскладываем в тригонометрические ряды по функциям

$$\begin{cases} U_{mk}^1(l, \varphi, t) = u_{mk}^1(l, t) \cos m\varphi, & V_{mk}^1(l, \varphi, t) = -v_{mk}^1(l, t) \cos m\varphi, \\ W_{mk}^1(l, \varphi, t) = w_{mk}^1(l, t) \cos m\varphi, & P_{mk}^1(l, \varphi, t) = p_{mk}^1(l, t) \cos m\varphi \end{cases} \quad (2)$$

или

$$\begin{cases} U_{mk}^2(l, \varphi, t) = u_{mk}^2(l, t) \sin m\varphi, & V_{mk}^2(l, \varphi, t) = -v_{mk}^2(l, t) \sin m\varphi, \\ W_{mk}^2(l, \varphi, t) = w_{mk}^2(l, t) \sin m\varphi, & P_{mk}^2(l, \varphi, t) = p_{mk}^2(l, t) \sin m\varphi. \end{cases} \quad (3)$$

Давление $P = p_0 + p$, где p_0 — давление в области, занимаемой жидкостью; p — функция, определяющая колебания давления в области, контактирующей с жидкостью в процессе движения.

Рассмотрим задачу о малых гармонических колебаниях упругой оболочки, т.е. предположим, что $u_{mk}(l, t) = \tilde{u}_{mk}(l)e^{i\omega_{mk}t}$, $v_{mk}(l, t) = \tilde{v}_{mk}(l)e^{i\omega_{mk}t}$, $w_{mk}(l, t) = \tilde{w}_{mk}(l)e^{i\omega_{mk}t}$, где

ω_{mk} — частота, а \tilde{u}_{mk} , \tilde{v}_{mk} , \tilde{w}_{mk} — собственные формы колебаний рассматриваемой оболочки с жидкостью.

2. Задача о малых гармонических колебаниях оболочки. Каждая из форм (2), (3) характеризуется m плоскостями $\varphi = \text{const}$, на которых в процессе колебаний остаются равными нулю упругие перемещения $u(l, \varphi, t)$, $w(l, \varphi, t)$ и функция колебания давления $p(l, \varphi, t)$, а также m плоскостями, на которых остаются равными нулю тангенциальные упругие перемещения $v(l, \varphi, t)$. Этим двум возможным формам собственных колебаний соответствует одна и та же частота собственных колебаний ω_{mk} .

Таким образом, для собственных форм колебаний оболочки с жидкостью имеем тригонометрические ряды:

$$\begin{cases} u_k = \sum_{m=0}^{\infty} u_{mk}(\alpha_{1mk} \cos m\varphi + \beta_{1mk} \sin m\varphi), \\ v_k = \sum_{m=0}^{\infty} v_{mk}(\alpha_{2mk} \cos m\varphi - \beta_{2mk} \sin m\varphi), \\ w_k = \sum_{m=0}^{\infty} w_{mk}(\alpha_{3mk} \cos m\varphi + \beta_{3mk} \sin m\varphi). \end{cases}$$

Для определения собственных форм колебаний оболочки в вакууме u_{mk} , v_{mk} , w_{mk} служат дифференциальные уравнения (используем вариационный принцип теории упругости), в которых для простоты опускаем индекс mk :

$$\begin{cases} (D_l \vec{U})(l, \varphi) + G_1 X(l, \varphi) = 0, \\ (D_\varphi \vec{U})(l, \varphi) + G_1 Y(l, \varphi) = 0, \\ (D_\gamma \vec{U})(l, \varphi) + G_1 Z(l, \varphi) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где D_l , D_φ , D_γ — линейные дифференциальные операторы четвертого порядка; $X(l, \varphi)$, $Y(l, \varphi)$, $Z(l, \varphi)$ определяются по заданным поверхностным и объемным силам; $G_1 = 2(1+\nu)/(Eh)$, E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина оболочки.

К уравнениям (4) необходимо добавить условия закрепления краев оболочки. В рассматриваемом случае один край оболочки, заданный уравнением $l = l_0$, жестко закреплен

$$\begin{aligned} u(l_0, \varphi) = 0, \quad v(l_0, \varphi) = 0, \quad w(l_0, \varphi) = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{l=l_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial l} \right|_{l=l_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial l} \right|_{l=l_0} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

другой край ($l = l_1$) — свободен

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{du}{dl} + \frac{\nu ds}{s} u - \frac{\nu m}{s} v + (k_1 + \nu k_2) w \right) + \frac{h^2}{12} Q_1(l) \Big|_{l=l_1} = 0, \\ \frac{m}{s} u + \frac{dv}{dl} - \frac{1 ds}{s dl} v + \frac{h^2}{12} Q_2(l) \Big|_{l=l_1} = 0, \\ - \frac{3\nu k_1 - (2 - 2\nu - 3\nu^2) k_2}{(1 - \nu^2)} \frac{d^2 u}{dl^2} + q_{311} \frac{du}{dl} + q_{310} u + q_{321} \frac{dv}{dl} + q_{320} v - \\ - \frac{2}{(1 - \nu)s} \frac{ds}{dl} \frac{d^3 w}{dl^3} - \frac{2}{(1 - \nu)s} \frac{ds}{dl} \frac{d^2 w}{dl^2} + q_{331} \frac{dw}{dl} + q_{330} w \Big|_{l=l_1} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{3\nu k_1 - (2 - 2\nu - 2\nu^2)k_2}{(1 - \nu)^2} \frac{du}{dl} + q_{410}u + q_{420}v - \frac{2}{1 - \nu} \frac{d^2w}{dl^2} - \frac{2\nu}{(1 - \nu)s} \frac{ds}{dl} \frac{dw}{dl} + q_{430}w \Big|_{l=l_1} = 0, \\ & q_{510}u + (2k_2 - k_1) \frac{dv}{dl} + q_{520}v - \frac{2m}{s} \frac{dw}{dl} + q_{530}w \Big|_{l=l_1} = 0, \\ & \frac{1}{1 - \nu} \frac{d^2u}{dl^2} + \frac{1}{(1 - \nu)s} \frac{ds}{dl} \frac{du}{dl} + q_{610}u - \frac{(1 + \nu)m}{2(1 - \nu)s} \frac{dv}{dl} + q_{620}v + \frac{k_1 + \nu k_2}{1 - \nu} \frac{dw}{dl} + q_{630}w \Big|_{l=l_1} = 0, \end{aligned}$$

где k_1, k_2 — главные кривизны оболочки; q_{ijk} — константы, а функции $Q_1(l)$ и $Q_2(l)$ представимы в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q_1(l) &= \frac{1 + 2\nu}{(1 - \nu)^2} \frac{d^3u}{dl^3} + \frac{1 + 4\nu + \nu^2}{(1 - \nu)^2 s} \frac{ds}{dl} \frac{d^2u}{dl^2} + q_{111} \frac{du}{dl} + q_{110}u - \frac{(1 + 6\nu - \nu^2)m}{2(1 - \nu)^2 s} \frac{d^2v}{dl^2} + \\ &+ q_{121} \frac{dv}{dl} + q_{120}v + \frac{3(1 + \nu)k_1 - 2(1 - 2\nu - 2\nu^2)k_2}{(1 - \nu^2)} \frac{d^2w}{dl^2} + q_{131} \frac{dw}{dl} + q_{130}w, \\ Q_2(l) &= \frac{(3 + 5\nu)m}{4(1 - \nu)s} \frac{d^2u}{dl^2} + q_{211} \frac{du}{dl} + q_{210}u + \frac{1}{4} \frac{d^3v}{dl^3} + q_{221} \frac{dv}{dl} + q_{220}v + q_{231} \frac{dw}{dl} + q_{230}w. \end{aligned}$$

Требуем также выполнения условий стыковки в промежуточных узловых точках.

Решение (4) с граничными условиями (6) осуществляется методом, описанным в [6]. Определив упругие перемещения оболочки в вакууме u, v, w , переходим к решению задачи Неймана для уравнения Лапласа для определения давления со стороны жидкости на оболочку.

3. Математическая модель движения оболочки с жидкостью. Задачу Неймана для функции давления $p(r, \varphi, z, t)$ сформулируем следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta p|_{\Omega} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial n}|_S = F|_S, \end{cases} \quad (7)$$

где Ω — область, ограниченная S .

Краевое условие на S_0 получено из предположения, что относительная скорость частицы жидкости, обтекающей смачиваемую поверхность оболочки, и относительная скорость соответствующей точки этой поверхности должны иметь одинаковые нормальные составляющие; на σ одинаковыми должны быть скорости подвижной границы жидкости описываемой функцией $f(r, \varphi, z, t)$:

$$\frac{\partial p}{\partial n} =: F(r, \varphi, z, t) = \begin{cases} -\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \vec{n} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} (\vec{r} \times \vec{n}) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right], & (r, \varphi, z, t) \in S_0, \\ -\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \vec{n} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} (\vec{r} \times \vec{n}) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right], & (r, \varphi, z, t) \in \sigma, \end{cases} \quad (8)$$

где ρ — плотность жидкости; \vec{v} и \vec{a} — соответственно, скорость движения и угловая скорость вращения системы координат, связанной с телом (оболочкой с жидкостью); \vec{r} — радиус-вектор рассматриваемой частицы жидкости; \vec{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности оболочки.

В первом приближении предполагаем, что свободная поверхность жидкости совершает поступательные перемещения, сохраняя плоскую конфигурацию, тогда функция $f(r, \varphi, z, t)$, ее описывающая, зависит только от времени t :

$$f(t) = -\frac{1}{A} \int_{S_0} w d\sigma,$$

где $A = \int_{\sigma} d\sigma$ — площадь плоской фигуры σ , функция $w(r, \varphi, z, t)$ — нормальное упругое перемещение точек срединной поверхности оболочки.

Зависимость функции p от f при таких же условиях можно записать так: $p = \rho g^* f$ на σ , где $g^* = a_{0z} - g_z$; a_{0z} — проекция вектора ускорения, с которым движется тело, на ось z подвижной системы координат; g_z — проекция ускорения силы тяжести на ту же ось.

Сведем двумерную задачу (7) к одномерной, используя симметричность оболочки. Функция $F(r, \varphi, z, t)$ в рассматриваемом случае представляет собой функцию длины дуги образующей l и полярного угла φ . Ищем давление в виде тригонометрического ряда:

$$p(r, \varphi, z) = p_0(z, r) + \sum_{m=1}^{\infty} [p_m^{(1)}(z, r) \cos m\varphi + p_m^{(2)}(z, r) \sin m\varphi]. \quad (9)$$

Получаем систему линейных двумерных обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентную уравнению Лапласа, которую запишем в операторном виде:

$$\begin{cases} \Lambda_0 p_0|_D = 0, & \Lambda_m p_m^{(j)}|_D = 0, \\ \frac{\partial p_0}{\partial n}|_L = F_0(l)|_L, & \frac{\partial p_m^{(j)}}{\partial n}|_L = F_0^{(j)}(l)|_L, \\ j = 1, 2, & m = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (10)$$

где D — плоская область, ограниченная контуром L (который задает форму оболочки вращения) и отрезком оси Oz , стягивающим этот контур; $F_0(l)$ и $F_0^{(j)}(l)$ — коэффициенты ряда Фурье функции $F(l, \varphi)$, заданной на граничной поверхности S : $F(l, \varphi) = F_0(l) + \sum_{m=1}^{\infty} [F_m^{(1)}(l) \cos m\varphi + F_m^{(2)}(l) \sin m\varphi]$. Оператор Λ_m действует следующим образом:

$$\Lambda_m p_m = \begin{cases} \frac{\partial^2 p_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial r} = 0, & m = 0, \\ \frac{\partial^2 p_m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_m}{\partial r} - \frac{m^2 p_m}{r^2}, & m \geq 1. \end{cases} \quad (11)$$

Фундаментальным решением дифференциального уравнения $\Lambda_m p_m = 0$ является функция J_m

$$J_m(z, r, z', r') = -2^{2m} r'^{m+1} r^m ((z - z')^2 + (r + r')^2)^{-m-1/2} \Phi_m(\xi), \quad (12)$$

где

$$\xi = \frac{(z - z')^2 + (r - r')^2}{(z - z')^2 + (r + r')^2}.$$

$\Phi_m(\xi)$ имеет логарифмическую особенность в точке $\xi = 0$: $\Phi_m(\xi) = \ln \xi + H_m(\xi)$, где $H_m(\xi)$ — гладкая функция:

$$H_m(\xi) = -\ln \xi + A_m \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((m+1/2)(m+3/2)\dots(m+k-1/2))^2 (1-\xi)^k}{(2m+1)(2m+1)\dots(2m+k) k!} \right), \quad (13)$$

A_m — константы. Обозначим точку с координатами (z, r) как x , с координатами (z', r') — как y .

Решение задачи Неймана для каждого m ищем в виде потенциала двойного слоя с плотностью $[p(x)]$:

$$p(y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} [p(x)] dS_x, \quad y \in L, \quad (14)$$

где функция $[p(x)] = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (p(x + \epsilon n) - p(x - \epsilon n))$ характеризует перепад давления; функция Грина $G(x, y) = \ln(1/|x - y|) + H(x, y)$ — фундаментальное решение уравнения $\Delta_m p_m = 0$ для фиксированного m .

Функция $p(x)$ будет решением поставленной задачи, если функция $[p(x)]$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} [p(x)] dS_x = T(y), \quad y \in L, \quad (15)$$

где $T(y) = \left. \frac{\partial F(y)}{\partial n} \right|_L$. Вносим дифференцирование под знак интеграла:

$$\frac{1}{2\pi} \int_L j(x) \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_y \partial n_x} dS_x = T(y), \quad y \in L, \quad (16)$$

где $j(x) = \partial[p(x)]/\partial n_y$.

Для эквивалентности этого уравнения исходной задаче следует добавить дополнительное условие (полученное интегрированием исходного уравнения (14))

$$\frac{1}{2\pi} \int_L j(x) \frac{\partial^2}{\partial n_y \partial n_x} G(x, \tilde{y}) dS_x = T(\tilde{y}), \quad \tilde{y} \in L \text{ — фиксированное.} \quad (17)$$

Параметризуем контур L : $x(t_k)$, $t \in [-1, 1]$, $t_k = 2s_k/|l| - 1$, где s_k — натуральный параметр; k — количество составных частей оболочки. Для $t_k \in (\alpha_k, \beta_k)$ получаем

$$\theta = 2 \frac{\varphi_k - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k} - 1; \quad t_k(\theta) = \frac{1}{2}((1 + \theta)\beta_k + (1 - \theta)\alpha_k);$$

$$\begin{cases} x: (-1, 1) \rightarrow l, \\ x(\theta) = x\left(\frac{1}{2}((1 + \theta)\beta_k + (1 - \theta)\alpha_k)\right). \end{cases} \quad (18)$$

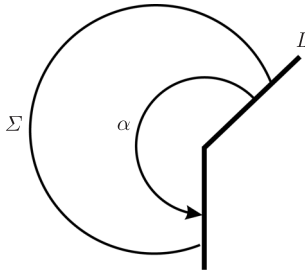


Рис. 2. Окрестность угловой точки

Рассмотрим поведение функции давления в окрестности узлов кривой, задающей оболочку вращения (рис. 2). Предполагаем, что исходная задача Неймана в области \$\Omega\$ имеет единственное решение.

Должно быть выполнено условие конечности энергии в окрестности угловой точки

$$\int_{\Sigma} \{|p|^2 + |\nabla p|^2\} d\sigma < \infty, \quad (19)$$

которое в полярных координатах имеет вид

$$\int_0^{\alpha} \int_0^{R_0} \left\{ |p|^2 + \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right|^2 \right\} r dr d\varphi < \infty, \quad (20)$$

где \$\Sigma\$ — пересечение исходной области с кругом (радиусом \$R_0\$ и центром в вершине ребра). Радиус \$R_0\$ выбираем так, что область \$\Sigma\$ будет являться сектором круга.

Решение задачи (7), удовлетворяющее условию (20) и условию

$$\frac{\partial}{\partial r} p(R_0, \varphi) = F(\varphi), \quad 0 < \varphi < \alpha, \quad (21)$$

имеет вид:

$$u(r, \varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{\pi n / \alpha} \cos \frac{\pi n \varphi}{\alpha}, \quad (22)$$

где \$B_n\$ определяются из условия (21).

При \$\pi < \alpha \leq 2\pi\$ составляющие градиента \$u - \frac{\partial u}{\partial r}\$ и \$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}\$ могут неограниченно расти при \$r \to 0\$ и выполняется оценка \$|\text{grad } u| = O(1/(r^{1-(\pi/\alpha)}))\$. Соответственно, для \$0 < \alpha < \pi\$ решение интегрального уравнения не имеет особенностей, а для \$\pi < \alpha < 2\pi\$ решение интегрального уравнения если и имеет особенность, то это особенность вида \$1/r^{(1-\pi)/\alpha}\$ (рис. 3).

Удовлетворяя условию на ребре, введем замену: \$b(\theta) = mj(\theta)/\sqrt{1-\theta^2}\$. После параметризации получаем

$$\frac{|l|^2}{4\pi} \int_{-1}^1 b(\theta) \frac{\partial^2}{\partial n_y \partial n_x} G(x(\theta), x(\theta_0)) \sqrt{1-\theta^2} d\theta = T(x(\theta_0)), \quad y = x(\theta_0) \in L. \quad (23)$$

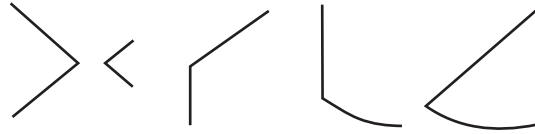


Рис. 3. Возможные угловые точки

Имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left(\ln \frac{1}{|x-y|} \right) = - \frac{1}{|x'(\theta)| |x'(\theta_0)|} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta_0} \ln \frac{1}{|x(\theta_0) - x(\theta)|}. \quad (24)$$

Тогда окончательно ГСИУ для определения перепада давления примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{|l|^2}{4\pi} \int_{-1}^1 b(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta_0} \left(\ln \frac{1}{|x(\theta_0) - x(\theta)|} \right) \sqrt{1-\theta^2} d\theta + \\ & + \frac{|l|^2}{4} \int_{-1}^1 b(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta_0} (H(x(\theta), x(\theta_0))) \sqrt{1-\theta^2} d\theta = T(x(\theta_0)). \end{aligned} \quad (25)$$

Первый интеграл в уравнении (25) понимается в смысле конечной части по Адамару [7], второй — интеграл Римана.

Уравнения (25), (17) с условием (20) эквивалентны исходной задаче (7). Дискретный аналог построим, используя метод дискретных особенностей [7, 8]. Заменим неизвестную функцию $b(\theta)$ и известные гладкие функции в полученном ГСИУ (25) интерполяционными полиномами и применим квадратурные формулы интерполяционного типа, узлами которых являются корни полиномов Чебышева второго рода.

Следовательно, определив функцию давления p из (25), (17), (20) и собственные формы колебаний оболочки в вакууме из (4) с соответствующими краевыми условиями (5) и (6), можем подставить их в уравнения движения (1) и получить систему уравнений для определения частот и форм гидроупругих колебаний оболочек.

Таким образом, в настоящей работе построена математическая модель гидроупругих колебаний оболочки с находящейся в ней жидкостью. В процессе совместного решения уравнений равновесия и задачи Неймана определяются давление жидкости на упругую оболочку и форма свободной поверхности жидкости. Получено фундаментальное решение рассматриваемой задачи Неймана, на основе которого получено ГСИУ. Для него можно построить дискретную модель, используя хорошо зарекомендовавший себя в других областях метод дискретных особенностей.

В дальнейшем предполагается учет сжимаемости жидкости, в этом случае рассматривается задача Неймана для уравнения Гельмгольца.

1. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. – Ленинград: Судостроение, 1976. – 200 с.
2. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов // Изв. АН. Механика тв. тела. – 1998. – 6. – С. 166–174.
3. Chen Z, Wang J., Liu H. Three-dimensional numerical analysis of flow-induced vibration in turbomachinery // IJ. Fluids Eng. – 1999. – 121, N 4. – P. 804–807.

4. Рапопорт И. М. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. – Москва: Машиностроение, 1967. – 359 с.
5. Еселева Е. В., Гнисько В. И., Стрельникова Е. А. Собственные колебания оболочек вращения, частично заполненных жидкостью // Пробл. машиностроения. – 2006. – 9, № 1. – С. 58–69.
6. Кузина И. Ю. Метод гиперсингулярных интегральных уравнений для задачи о гидроупругих колебаниях упругой оболочки вращения // Вестн. Херсон. нац. техн. ун-та. – 2006. – 2(25). – С. 271–276.
7. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – Москва: ТОО “Янус”, 1995. – 520 с.
8. Гандель Ю. В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: Изд-во Харьк. нац. ун-та им. В. Н. Каразина, 2001. – 92 с.

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина
Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 11.01.2008

УДК 535.3:537.876.23:631.3

© 2008

Академік НАН України І. В. Сергієнко, О. О. Литвин

Математичне моделювання внутрішньої структури 3D тіла на основі двох рентгенівських знімків у двох взаємно перпендикулярних ракурсах

The class of functions of three variables which can be restored by two X-ray pictures in mutually perpendicular directions is investigated.

На даний час реконструктивна комп'ютерна томографія (РКТ) є наукою, що найбільш динамічно розвивається внаслідок її унікальних можливостей отримання і реконструкції інформації про досліджувані об'єкти. В основі цього твердження лежить той факт, що математичний апарат РКТ — перетворення Радона, інтегральна геометрія — дозволяє отримувати інформацію про об'єкт з принципіально новими якостями, порівняно з відомими методами досліджень в біології, молекулярній генетиці, сейсмології, океанології, медицині, електронній мікроскопії тощо. Томографічні системи використовують різні методи отримання експериментальних даних: рентгенівське, оптичне, синхротронні випромінювання, власне випромінювання, випромінювання об'єктів, що “самі світяться”, сейсмічні хвилі, ультразвукову надзвичайно високочастотну (НВЧ), ядерно-магнітно-резонансну томографію (ЯМР) тощо.

Зауважимо, що застосування класичних методів КТ [2–6] для розв'язання ряду задач неможливе у зв'язку з недостатньою або дуже малою кількістю проєкцій. Водночас в працях [7, 8] показана принципова можливість малоракурсної комп'ютерної томографічної реконструкції плазмових об'єктів, що світяться, та локальних внутрішніх неоднорідностей в конструйованих виробках. Огляд розроблених за останній час методів (без посилань на методи, пов'язані з інтерлінацією, інтерфлетацією та мішаною апроксимацією функцій [10, 11]), алгоритмів та технічних засобів міститься в [9].