

УДК 519.85

© 2008

Т. Е. Романова, А. В. Кривуля, М. В. Злотник

## Трансляционное прямоугольное покрытие

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Г. Стояном)

*The article considers a covering problem of a multiconnected compact polygonal region by a finite family of rectangles. The  $\Gamma$ -function technique is used for an analytical description of the relationship between the region and the family of rectangles. A covering criterion is formalized. A mathematical model of the problem is discussed. A solution strategy is developed. The solution strategy is provided with an example.*

Рассматривается задача покрытия [1] в следующей постановке. Пусть задана компактная многоугольная область  $\Omega(v) \subset R^2$  и семейство  $\Lambda = \{P_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  прямоугольников  $P_i = \{(x, y) \in R^2, -a_i \leq x \leq a_i, -b_i \leq y \leq b_i\}, i = 1, 2, \dots, n$ , где  $R^2$  — двумерное арифметическое евклидово пространство.

Полагаем, что  $v = \text{const}$ , а расположение  $P_i$  в пространстве  $R^2$  определяется вектором  $u_i = (x_i, y_i)$ . Семейство транслированных прямоугольников  $P_i(u_i), i = 1, 2, \dots, n$ , обозначим  $\Lambda(u)$ , где  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^{2n}$ .

Семейство  $\Lambda(u)$  является покрытием области  $\Omega$  [2], если существует вектор  $u \in R^{2n}$ , такой, что

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i(u_i). \quad (1)$$

**Задача.** Определить — существует ли вектор  $u \in R^{2n}$  такой, что выполняется условие (1).

Пусть  $u^0 \in R^{2n}$  удовлетворяет (1). Тогда справедливо

$$\Omega \cap \text{int } H(u^0) = \emptyset, \quad (2)$$

где  $H(u^0) = R^2 \setminus \text{int } P(u^0), P(u^0) = \bigcup_{i=1}^n P_i(u_i^0), \text{int } H(u^0)$  — внутренность множества  $H(u^0)$  [3].

Соотношение (2) может быть описано неравенством

$$\Phi(w, v) \geq 0, \quad (3)$$

где  $\Phi(w, v)$  —  $\Phi$ -функция [4] множества  $P(w)$  и  $\Omega(v)$  [5, 6]. Назовем неравенство (3) критерием покрытия.

Конструктивным средством описания отношений  $\Omega$  и  $\Lambda(u)$  является  $\Gamma$ -функция [2]:

$$\Gamma(u) = \begin{cases} \Gamma_1(u), & \text{если } u \in R_1^{2n}, \\ \Gamma_2(u), & \text{если } u \in R_2^{2n}, \\ \dots\dots\dots, \\ \Gamma_\eta(u), & \text{если } u \in R_\eta^{2n}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $R^{2n} = \bigcup_{k=1}^{\eta} R_k^{2n}$  — разбиение пространства  $R^{2n}$ ,  $\eta \leq 11^\sigma$ ,  $\sigma = (1/2)n(n-1)$ ,  $\Gamma_k(u) =$

$= F_k(u, v)|_{v=0}$ , здесь  $\eta = 10^{\sigma_1} \cdot 7^{\sigma_2} \cdot 5^{\sigma_3}$ ,  $\sigma = \sum_{l=1}^3 \sigma_l$ ,  $\sigma_l \in \{0, 1, 2, \dots, (1/2)n(n-1)\}$ ,  $l = 1, 2, 3$  [7],

$F_k(u^0, v)$  —  $\Phi$ -функция  $\Omega(v)$  и  $H(u^0)$ .

Таким образом, если существует вектор  $u^*$  такой, что  $\Gamma(u^*) \geq 0$ , то  $\Omega \cap \text{int } H(u^*) = \emptyset$ . Тогда решение задачи покрытия может быть сведено к задаче

$$\Gamma(u^*) = \max_{u \in R^{2n}} \Gamma(u). \quad (5)$$

При этом решение задачи (5) завершается, как только выполняется условие (3).

Если  $\Gamma(u^*) < 0$ , то покрытие не существует.

Представим задачу (5) в следующем виде:

$$\chi^* = \max\{\chi_q^*, q = 1, 2, \dots, \eta_1\}, \quad (6)$$

$$\chi_q^* = \Gamma_q(u^*) = \max_{u \in R_q^{2n}} \Gamma_q(u), \quad q = 1, 2, \dots, \quad \eta_1 < \eta. \quad (7)$$

Из (6), (7) следует, что, как только выполняется неравенство  $\chi_q^* \geq 0$ , покрытие получено. Задача (7) сводится к

$$\chi_q^* = \max_{u \in D_q} \chi_q, \quad (8)$$

где  $D_q = W_q \cap V_q$ ,  $W_q = \{u \in R^{2n} \mid \Gamma_q(u) \geq \chi_q\}$ ,  $V_q = R_q^{2n}$ .

Для решения задачи (8) строится дерево решений. Каждой  $p$ -й концевой вершине этого дерева соответствует система неравенств, описывающая выпуклое множество  $W_{qp}$ . Таким образом, решение задачи (8) можно представить в виде последовательности задач линейного программирования

$$\chi_{qp}^* = \max_{u \in D_{qp}} \chi_{qp}, \quad (9)$$

где  $D_{qp} = W_{qp} \cap V_{qp}$ ,  $W_{qp} = \{u \in R^{2n} \mid \Gamma_{qp}(u) \geq \chi_{qp}\}$ ,  $V_q = R_q^{2n}$ ,  $p = 1, 2, \dots, N_1$ ,  $N_1 \leq N = (n+1)^{l_1}(n+2)^{l_2}(n+4)^{l_3}$ ,  $l_1, l_2, l_3$  — количество базовых объектов (квадрантов плоскости, полуполос, прямоугольников) соответственно, участвующих в формировании множества  $H(u^0)$ .

Стратегия решения задачи (6) состоит из следующих этапов.

Оценивается суммарная площадь покрывающих объектов  $S_P$  и области покрытия  $S_\Omega$ . Если  $S_\Omega > S_P$ , покрытие не существует, в противном случае переходим к следующему этапу.

Осуществляется декомпозиция задачи покрытия области  $\Omega$  на подзадачи покрытия связанных областей  $\Omega_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, m$ .

Решается задача покрытия каждой связанной области  $\Omega_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, m$ , в соответствии с алгоритмом, приведенным ниже.

1. Построение множества перестановок  $\Pi = \{\pi_j, j = 1, 2, \dots, t\}$ , элементами  $\pi_j$  которого являются последовательности номеров покрывающих прямоугольников  $P_i(u_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_r$ . Из множества  $\Pi$  выбирается  $\tau \leq t$  перестановок модифицированным методом сужающихся окрестностей [8, 9].

2. Формирование стартовой точки  $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_{n_r}^0)$  для каждой последовательности  $\pi_j$  методом многоугольников Воронова [10].

3. Построение множества  $C^0 = R^2 \setminus \text{int} \bigcup_{i=1}^{n_r} P_i(u_i^0)$  [11].

4. Проверка критерия покрытия (3). Если условие (3) не выполняется, то переходим к шагу 5.

5. Построение матрицы пространственных форм  $M_q = |m_{ij}|$ , элементы  $m_{ij}$  которой описываются либо структурой  $\langle A_{ij}^k(u_i, u_j) + B_{ij}^k > 0, k = 1$ , либо системой неравенств  $\{A_{ij}^k(u_i, u_j) + B_{ij}^k \geq 0, k = 2, 3, \dots, K$ , однозначно определяющих соответствующую  $k$ -ю пространственную форму множества  $P_{ij} = P_i(u_i) \cup P_j(u_j)$ ,  $i \neq j = 1, \dots, n_r$ .

6. Построение множества

$$V_q = \left\{ u \in R^{2n} \mid A_{12}^{k_1}(u_1, u_2) + B_{12}^{k_1} \geq 0, A_{13}^{k_2}(u_1, u_3) + B_{13}^{k_2} \geq 0, \dots, A_{1n_r}^{k_{n_r}}(u_1, u_{n_r}) + B_{1n_r}^{k_{n_r}} \geq 0, \right. \\ \left. A_{23}^{k_{n_r}+1}(u_2, u_3) + B_{23}^{k_{n_r}+1} \geq 0, \dots, A_{n_r-1, n_r}^{q_\sigma}(u_{n_r-1}, u_{n_r}) + B_{n_r-1, n_r}^{q_\sigma} \geq 0 \right\}.$$

7. Построение множества  $H(u^0) = R^2 \setminus \text{int} \bigcup_{i=1}^{n_r} P_i(u_i^0)$ ,  $u^0 \in R_q^{2n_r}$  в виде объединения базовых объектов.

8. Построение функции  $\Gamma_q(u)$ .

9. Решение задачи (8),  $u^*$  — вектор, соответствующий решению задачи (8).

10. Проверка условия  $\chi_q^* \geq 0$ . Если условие выполняется, то покрытие найдено, в противном случае переходим к шагу 11.

11. Проверка условия  $u^* \neq u^0$ . Если условие выполняется, то переходим к шагу 5, в противном случае переходим к шагу 12.

12. Построение дерева решений.

13. Решение задачи (9) для  $p$ -й концевой вершины,  $p = 1, \dots, N$ , где  $N$  — количество концевых вершин дерева решений.

14. Проверка условия  $\Gamma_q^p(u^*) \leq \Gamma_q(u^0)$ . Если условие выполняется, то переходим к шагу 5, в противном случае переходим к шагу 15.

15. Проверка условия  $p \geq N$ . Если условие выполняется, то переходим к шагу 10, в противном случае переходим к шагу 16.

16.  $p = p + 1$ , переходим к шагу 13.

17. Проверка критерия останова (допустимое время счета).

Пример. Пусть имеется трехсвязная многоугольная область (рис. 1), представленная объединением выпуклых многоугольников  $\Omega_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, 11$  (рис. 2). Полагаем, что  $\Omega_r$  задается последовательностью вершин  $\{v_{rj}, j = 1, 2, \dots, m_r\}$  против часовой стрелки:

$$\{v_{1j}, j = 1, \dots, 4\} = \{(0, 100), (0, 70), (80, 70), (90, 100)\};$$

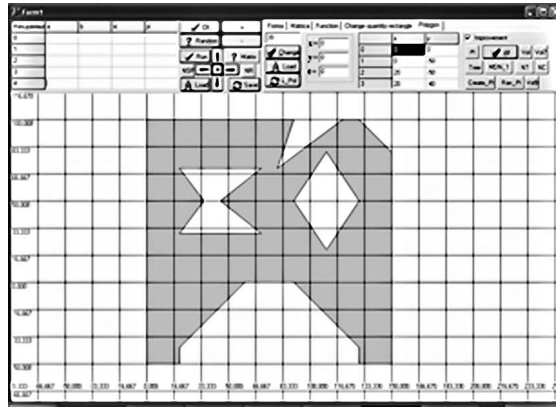


Рис. 1. Трехсвязная многоугольная область  $\Omega$

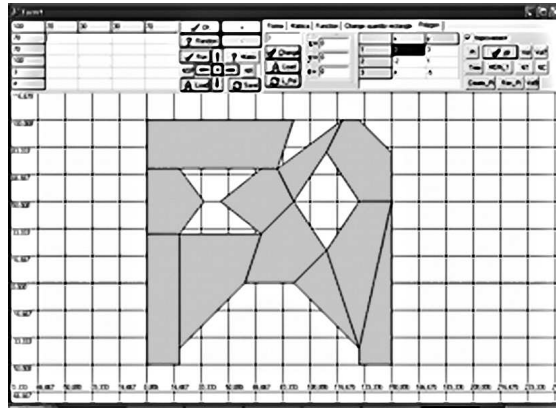


Рис. 2. Декомпозиция области  $\Omega$  на выпуклые многоугольники  $\Omega_i$

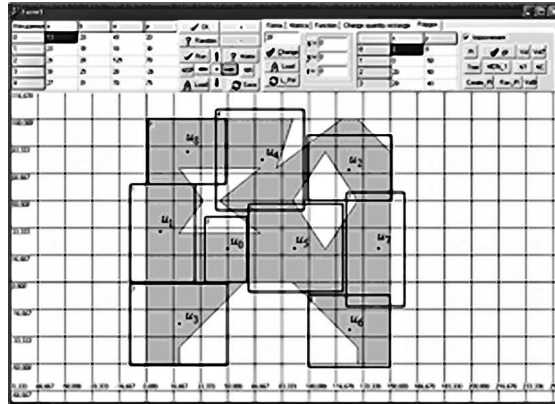
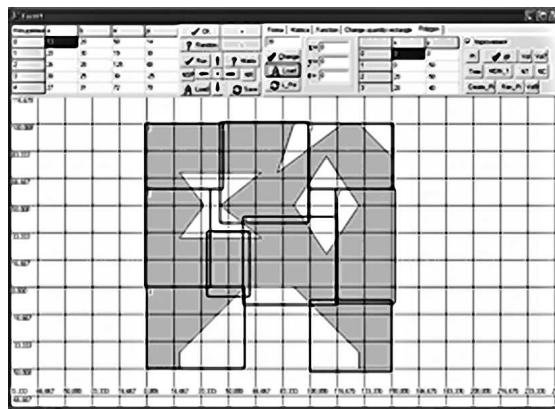
- $\{v_{2j}, j = 1, \dots, 5\} = \{(0, 70), (0, 30), (20, 30), (35, 50), (20, 70)\};$
- $\{v_{3j}, j = 1, \dots, 4\} = \{(0, 30), (0, -50), (20, -50), (20, 30)\};$
- $\{v_{4j}, j = 1, \dots, 4\} = \{(20, 30), (20, -40), (60, 0), (70, 30)\};$
- $\{v_{5j}, j = 1, \dots, 5\} = \{(70, 70), (45, 50), (70, 30), (90, 50), (80, 70)\};$
- $\{v_{6j}, j = 1, \dots, 5\} = \{(90, 50), (70, 30), (60, 0), (90, 0), (110, 20)\};$
- $\{v_{7j}, j = 1, \dots, 3\} = \{(110, 20), (90, 0), (130, -40)\};$
- $\{v_{8j}, j = 1, \dots, 4\} = \{(150, 50), (130, 50), (110, 20), (130, -40)\};$
- $\{v_{9j}, j = 1, \dots, 4\} = \{(150, 50), (130, -40), (130, -50), (150, -50)\};$
- $\{v_{10j}, j = 1, \dots, 6\} = \{(130, 100), (120, 100), (110, 80), (130, 50), (150, 50), (150, 80)\};$
- $\{v_{11j}, j = 1, \dots, 4\} = \{(120, 100), (80, 70), (110, 80), (90, 50)\}.$

Информация о метрических характеристиках прямоугольников  $P_i$ ,  $i = 0, 2, \dots, 8$ , приведена в табл. 1.

Точка  $u^0$ , соответствующая начальному размещению прямоугольников  $P_i(u_i^0)$ ,  $i = 0, \dots, \dots, 8$ ,  $\Omega \notin \Lambda(u^0)$  (рис. 3),  $u^0 = ((49, 20), (10, 30), (125, 70), (20, -26), (70, 75), (92, 21), (125, -30), (141, 20), (25, 80))$ .

Таблица 1

Параметры прямоугольников	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$
$a$	13	20	26	30	27	29	25	18	24
$b$	20	30	20	25	31	27	22	35	20

Рис. 3. Начальное размещение семейства  $\Lambda(u_0)$ Рис. 4. Покрытие многоугольной области  $\Omega$  прямоугольниками  $P_i(u_i^*)$ ,  $i = 0, \dots, 8$ 

Точка  $u^*$ , удовлетворяющая условию покрытия,  $\Omega \subset \Lambda(u^*)$  (рис. 4),  $u^* = ((50, 14), (19, 30), (125, 80), (30, -25), (72, 70), (88, 16), (125, -30), (134, 25), (23, 80))$ .

1. Daniels K., Inkulu R. An Incremental Algorithm for Translational Polygon Covering // University of Massachusetts at Lowell Computer Science Technical Report. – 2001. – No 1. – P. 1–31.
2. Stoyan Yu. Covering a polygonal region by a collection of various size rectangles // Пробл. машиностроения. – 2007. – 10, No 2. – С. 67–82.
3. Александрян Г. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. – Москва: Высш. шк., 1979. – 336 с.
4. Stoyan Yu. G.  $\Phi$ -function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. – No 8. – С. 112–117.
5. Stoyan Yu., Scheithauer G., Gil M., Romanova T.  $\Phi$ -function for complex 2D objects // 4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. – 2004. – 2, No 1. – P. 69–84.
6. Stoyan Yu., Terno J., Scheithauer G., Gil N., Romanova T.  $\Phi$ -function for 2D primary objects // Studia Informatica, Paris, University. – 2002. – 2, No 1. – P. 1–32.
7. Кривуля А. В., Злотник М. В., Романова Т. Е. Средства математического моделирования в задачах прямоугольного покрытия произвольных многоугольных областей // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 4. – С. 34–40.

8. Стоян Ю. Г., Чугай А. М. Размещение цилиндров и параллелепипедов в призме с учетом заданных кратчайших расстояний // Доп. НАН України. – 2006. – № 3. – С. 29–35.
9. Стоян Ю. Г., Соколовский В. З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. – Киев: Наук. думка, 1980. – 205 с.
10. Стоян Ю. Г., Пацук В. Н. Покрытие многоугольной области минимальным количеством одинаковых кругов заданного радиуса // Доп. НАН України. – 2006. – № 3. – С. 74–77.
11. Злотник М. В., Кривуля А. В., Романова Т. Е. Аналитическое описание условия покрытия прямоугольной области прямоугольными объектами // Искусств. интеллект. – 2006. – № 4. – С. 175–183.

Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 12.02.2008

УДК 535.3:537.876.23:631.3

© 2008

Академік НАН України І. В. Сергієнко, О. О. Литвин

## Математичне моделювання внутрішньої структури 3D тіла на основі трьох рентгенівських знімків у трьох взаємоперпендикулярних ракурсах

*The explicit description of a class of functions of three variables that are a mathematical model of the inner structure of a 3D body (density, attenuation constant), which can be restored by three X-ray pictures in mutually perpendicular aspects is given.*

Дана робота присвячена дослідженню класу функцій, що описують внутрішню структуру 3-вимірного тіла (щільність, коефіцієнт поглинання), які можна точно відновити за допомогою всього трьох рентгенівських знімків у взаємоперпендикулярних ракурсах методом, описаним в [1]. Вказаний метод оснований на використанні операторів мішаної апроксимації функцій [2, 3]. Ця робота є продовженням досліджень роботи [4], у якій для відновлення об'єктів використовувалось всього два рентгенівських знімки. Огляд досліджень з близької за змістом тематики наведено в [5–12].

**Основні твердження роботи.** Для побудови математичної моделі внутрішньої структури тривимірного тіла будемо використовувати мішану апроксимацію  $B_{m,n,p}f(x, y, z)$  сумами Фур'є функцій трьох змінних  $f(x, y, z) \in L_2[0, 1]^3 \cap C[0, 1]^3$  за змінними  $x, y, z$ , побудовану за допомогою сум Фур'є функцій  $f(x, y, z)$  порядків  $m, n, p$  за змінними  $x, y, z$ , відповідно,

$$F_{m,x}f(x, y, z) = \sum_{k_1=-m}^m c1_{k_1}(f; y, z)e^{i2\pi k_1 x}, \quad c1_{k_1}(f; y, z) = \int_0^1 f(x, y, z)e^{-i2\pi k_1 x} dx,$$

$$F_{n,y}f(x, y, z) = \sum_{k_2=-n}^n c2_{k_2}(f; x, z)e^{i2\pi k_2 y}, \quad c2_{k_2}(f; x, z) = \int_0^1 f(x, y, z)e^{-i2\pi k_2 y} dy,$$