ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2008

МЕХАНІКА

УДК 534.3
© **2008**

А. О. Борисюк

Про використання моделей пульсацій тиску на плоскій стінці для опису пульсацій тиску на поверхнях циліндричних конструкцій. Аналіз результатів

(Представлено академіком НАН України В. Т. Грінченком)

Conditions are searched, at which the available pressure fluctuation models on a flat wall (i. e., the models of Corcos, Chase, F. Williams, and Smol'yakov and Tkachenko) can be used to describe the pressure fluctuation field at surfaces of cylindrical structures on their interaction with fully developed turbulent flows of an incompressible fluid. For this purpose, an appropriate method and an experimental equipment are developed. As a result, it is found that, in case of axial symmetry of the flow, the acceptable-for-practice results of calculations of the vibration and/or acoustic fields of cylindrical structures can be obtained in the frames of the Chase model. This allows one to recommend the use of the model to describe the pressure field noted above. In case of a non-axisymmetric flow, the application of all the pressure fluctuation models on a flat wall is unreasonable.

В роботі [1] сформульовано мету роботи, а також вибрано й обгрунтовано метод дослідження. Нижче аналізуються результати роботи.

1. Коливання трубки під дією пульсацій тиску. Перш ніж переходити до аналізу результатів, нагадаємо суть методу і наведемо необхідні співвідношення з [1]. Суть методу полягає у визначенні реакції S_w пружної трубки на поле пульсацій пристінного тиску p_t в рамках вибраної його моделі і зіставленні цієї реакції з відповідними експериментальними даними з метою встановлення меж придатності моделі для опису поля p_t, яке виникає на поверхнях циліндричних конструкцій. Вираз для спектра S_w має такий вигляд:

$$S_w(\phi, z, \omega) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (S_w(\phi, z, \omega))_{nm}^{(j)} = \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(j)2}(\phi, z)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^4 |a_{nm}(\omega)|^2} \Phi_{p_{nm}}^{(j)}(\omega). \qquad (1)$$

Тут ϕ та z — кутова й осьова координати; ω — частота; $\Psi_{nm}^{(1)} = \cos(n\phi)\sin(k_m z)$ і $\Psi_{nm}^{(2)} = \sin(n\phi)\sin(k_m z)$ — власні форми коливань трубки у вакуумі; функції

$$\Phi_{p_{nm}}^{(j)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A_{nm}^{(j)}(k_\phi, k_z)|^2 \Phi_p(k_\phi, k_z, \omega)\, dk_\phi dk_z$$

характеризують ступінь збудження форм $\Psi_{nm}^{(j)}$ полем p_t; величини $|a_{nm}|^2 = \rho_v^2 h^2[(\omega_{nm}^2 - \omega^2)^2 + \mu_v^2 \omega_{nm}^4]$ описують реакцію цих форм на одиничне навантаження; Φ_p є частотно-хвильовим спектром поля p_t; функції $|A_{nm}^{(j)}|^2 = |A_n^{(j)}(k_\phi)|^2 |A_m(k_z)|^2$, $|A_n^{(1)}|^2 = \dfrac{2k_\phi^2}{(k_\phi^2 - k_n^2)^2}[1 - \cos(2\pi k_\phi a)]$, $|A_n^{(2)}|^2 = \dfrac{2k_n^2}{(k_\phi^2 - k_n^2)^2}[1 - \cos(2\pi k_\phi a)]$, $|A_m|^2 = \dfrac{2k_m^2}{(k_z^2 - k_m^2)^2}[1 - (-1)^m \cos(k_z L)]$ — модальними фільтрами; $\omega_{nm} = (c_p/a)\sqrt{1 + \beta^2 k_{nm}^4 a^4}$ — резонансними частотами трубки у вакуумі; $k_m = m\pi/L$, $k_n = n/a$, $k_{nm} = \sqrt{k_n^2 + k_m^2}$ — структурними хвильовими числами; k_ϕ і k_z — хвильовими числами у напрямках ϕ і z відповідно; $c_p = \sqrt{E_v/(\rho_v(1 - \nu_v^2))}$ — швидкістю поздовжніх хвиль у стінці трубки; $\beta^2 = h^2/(12a^2)$.

Для частотно-хвильового спектра Φ_p використовуються моделі
Коркоса:

$$\Phi_p(k_1, k_2, \omega)_{\text{Corcos}} = \\ = P(\omega)\pi^{-2}\alpha_1\alpha_2\left(\frac{\omega}{U_c}\right)^2\left[\left(k_1 - \frac{\omega}{U_c}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_1\omega}{U_c}\right)^2\right]^{-1}\left[k_2^2 + \left(\frac{\alpha_2\omega}{U_c}\right)^2\right]^{-1}; \tag{2}$$

Чейза:

$$\Phi_p(k_1, k_2, \omega)_{\text{Chase}} = \rho^2 V_*^3\left[c_M\frac{k_1^2}{K_M^5} + c_T\frac{|\vec{k}|^2}{K_T^5}\right], \\ K_i^2 = \frac{(\omega - U_c k_1)^2}{h_i^2 V_*^2} + |\vec{k}|^2 + (b_i\delta)^{-2}, \qquad I = M, T; \tag{3}$$

Фокс Вілліамса:

$$\Phi_p(k_1, k_2, \omega)_{\text{FW}} = \\ = P(\omega)\left(\frac{|\vec{k}|U_c}{\omega}\right)^2\pi^{-2}\alpha_1\alpha_2\left(\frac{\omega}{U_c}\right)^2\left[\left(k_1 - \frac{\omega}{U_c}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_1\omega}{U_c}\right)^2\right]^{-1}\left[k_2^2 + \left(\frac{\alpha_2\omega}{U_c}\right)^2\right]^{-1}; \tag{4}$$

Смолякова і Ткаченка:

$$\Phi_p(k_1, k_2, \omega)_{\text{Sm–Tk}} = A(\omega)\frac{P(\omega)}{2\pi m_0}\left(\frac{U_c}{\omega}\right)^2 h(\omega)[F(\vec{k}, \omega) - \Delta F(\vec{k}, \omega)] \tag{5}$$

(відповідні позначення див. в [1]).

2. Аналіз результатів. Осесиметрична течія. На рис. 1 зображено типові результати вимірювань і розрахунку спектра $S_w(\phi, z, f) = 4\pi S_w(\phi, z, \omega)$ ($f = \omega/2\pi$ [2, 3]) у випадку осесиметричної течії. Бачимо, що експериментальна крива S_w (крива *1*) загалом спадає з ростом частоти і в діапазоні $f > 210$ Гц має чітко виражені максимуми. Аналіз коливань трубки показує [1], що така поведінка кривої *1* визначається, головним чином, характером розподілу енергії течії по вихорах у трубці та резонансними властивостями трубки. Перший фактор, внаслідок зменшення енергонасиченості вихорів зі зменшенням їх розмірів, зумовлює загальне спадання спектральних характеристик поля p_t з ростом частоти [2, 3], а відтак і загальне спадання кривої *1*. Другий же фактор, окрім відповідного впливу на характер спадання функції S_w з частотою, приводить ще й до появи в ній зазначених максимумів при збігу частоти сили p_t з власними частотами коливань трубки ω_{nm}.

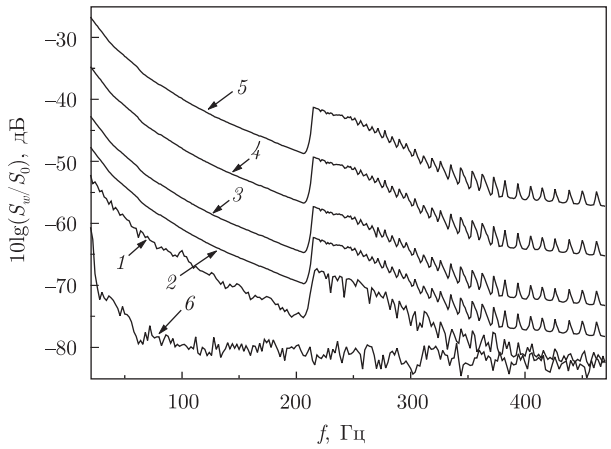

Рис. 1. Частотний спектр прогину трубки радіусом $a = 9$ мм у точці $z = L/2$ у випадку осесиметричної течії ($U = 30$ м/с, $\mathrm{Re}_D = 36000$, $S_0 = w_0^2 U/L$, $w_0 = 0{,}5\rho U^2 (L/U)^3/(\rho_v h)$):
1 — експеримент; *2* — розрахунок для моделі (3); *3* — розрахунок для моделі (5); *4* — розрахунок для моделі (4); *5* — розрахунок для моделі (2); *6* — навколишній шум

Сказане підтверджується аналізом виразу (1) для випадку осесиметричної течії ($n = 0$). У цьому виразі визначальною для поведінки спектра S_w є поведінка частотних функцій $\Phi^{(j)}_{p_{nm}}$ і $|a_{nm}|^2$. Функції $\Phi^{(j)}_{p_{nm}}$, як випливає із співвідношень

$$\Phi_p(k_\phi, k_z, \omega) = P(\omega)\Phi_{p*}(k_\phi, k_z, \omega), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_{p*}(k_\phi, k_z, \omega)\, dk_\phi dk_z = 1,$$

$$\Phi^{(j)}_{p_{nm}}(\omega) = P(\omega) \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |A^{(j)}_{nm}(k_\phi, k_z)|^2 \Phi_{p*}(k_\phi, k_z, \omega)\, dk_\phi dk_z = \alpha(\omega)P(\omega),$$

мають подібний до частотного спектра пульсацій тиску $P(\omega)$ характер спадання з частотою (тут α — слабозмінювана порівняно з P функція частоти). Величини $|a_{nm}|^2$ також загалом спадають з ростом ω [2, 3] і, разом з функціями $\Phi^{(j)}_{p_{nm}}$, визначають зображене на рис. 1 загальне спадання кривої *1*. Крім того, $|a_{nm}|^2$ мають ще максимуми в околі резонансних частот трубки ω_{nm}, які й спричиняють появу максимумів в експериментальній кривій *1* у діапазоні $f > 210$ Гц.

Подальший аналіз рис. 1 засвідчує, що спектри S_w, розраховані в рамках моделей (2)–(5), загалом подібні до експериментальної кривої як за характером спадання з частотою, так і за кількістю та положенням максимумів. Проте вони відрізняються від неї за рівнями. Так, відмінність положення кривої *2*, розрахованої на основі моделі Чейза, від положення кривої *1* є найменшою і не перевищує 4–7 дБ (це становить 7–10% відносної похибки $\Delta_r = |((S_w)_{\mathrm{exp}} - S_w)/(S_w)_{\mathrm{exp}}| \times 100\%$ і є прийнятним при проведенні оцінок коливальних і акустичних полів конструкцій при їх взаємодії з турбулентними течіями [2]; тут $(S_w)_{\mathrm{exp}}$ — експериментально знайдений спектр S_w). Використання моделі Смолякова і Ткаченка приводить до більших відмінностей (9–12 дБ або 15–19% відносної похибки) між розрахованими та виміряними рівнями спектра S_w (порівняти криві *3* та 1). Що ж до моделі Фокс Вілліамса і особливо моделі Коркоса, то одержані на їх основі оцінки спектра S_w (криві *4*

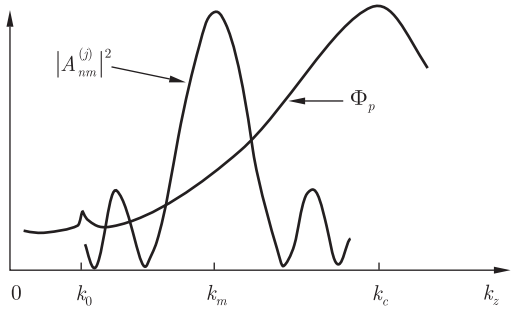

Рис. 2. Функції $|A_{nm}^{(j)})|^2$ і Φ_p при $\omega = \text{const}$

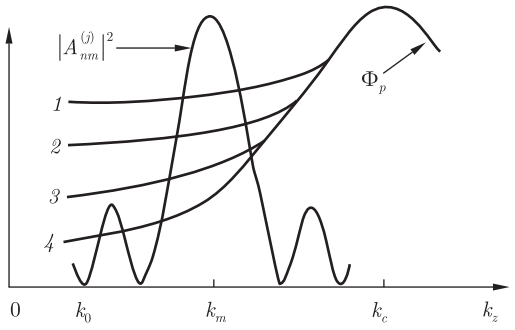

Рис. 3. Схематичне зображення моделей спектра Φ_p при $\omega = \text{const}$:
1 — модель Коркоса; *2* — модель Фокс Вілліамса; *3* — модель Смолякова і Ткаченка; *4* — модель Чейза

та *5*) значно вищі від експериментальних (для цих моделей відносна похибка становить відповідно 35–40 і 49–54%).

Така різниця між рівнями спектра S_w, розрахованого на основі моделей (2)–(5), пояснюється різною вагомістю відносного внеску різних складових поля p_t в реакцію трубки S_w (рис. 2) та відмінностями між моделями поля p_t у діапазоні відносно малих хвильових чисел $k_0 < |\vec{k}| = \sqrt{k_\phi^2 + k_z^2} \ll k_c$ (рис. 3) [1]. Справді, для вибраних при побудові рис. 1 значень параметрів маємо: $M = U/c_0 \ll 1$, $k_0/k_c \ll 1$, $k_m/k_c \ll 1$, $k_0/k_m < 1$. Для таких співвідношень між характеристиками трубки і течії в ній конвективні складові $|\vec{k}| \approx k_c$ та складові з відносно малими $|\vec{k}|$ приблизно однаково ефективно збуджують моди $\Psi_{nm}^{(j)}$, резонансні частоти яких потрапляють до вибраного на рис. 1 частотного інтервалу [2, 3]. Ефективність же збудження таких мод акустичними складовими $0 < |\vec{k}| \leqslant k_0$ є значно нижчою. Це означає, що доданки $(\Phi_{p_{nm}}^{(j)})_{low_w_n}$ і $(\Phi_{p_{nm}}^{(j)})_{conv}$ у виразі (8а) роботи [1], а відтак і доданки $(S_w)_{low_w_n}$ та $(S_w)_{conv}$ у співвідношеннях (8б) роботи [1] та (1) мають однаковий порядок:

$$\frac{(\Phi_{p_{nm}}^{(j)})_{low_w_n}}{(\Phi_{p_{nm}}^{(j)})_{conv}} = O(1), \qquad (\Phi_{p_{nm}}^{(j)})_{low_w_n} > (\Phi_{p_{nm}}^{(j)})_{conv};$$

$$\frac{(S_w)_{low_w_n}}{(S_w)_{conv}} = O(1), \qquad (S_w)_{low_w_n} > (S_w)_{conv}.$$

При цьому вони значно більші за доданки $(\Phi_{p_{nm}}^{(j)})_{ac}$ та $(S_w)_{ac}$ відповідно:

$$(\Phi_{p_{nm}}^{(j)})_{low_w_n},\ (\Phi_{p_{nm}}^{(j)})_{conv} \gg (\Phi_{p_{nm}}^{(j)})_{ac}; \qquad (S_w)_{low_w_n},\ (S_w)_{conv} \gg (S_w)_{ac}.$$

Як відзначалось в [1], моделі (2)–(5) однаково добре описують конвективну область спектра Φ_p, але відрізняються між собою в області $k_0 < |\vec{k}| \ll k_c$ (див. рис. 3). Це зумовлює приблизно однакову величину доданка $(\Phi^{(j)}_{p_{nm}})_{conv}$ у виразі (8а) роботи [1], а відтак і приблизно однакове значення відповідної частини $(S_w)_{conv}$ у співвідношеннях (8б) роботи [1] та (1) для всіх моделей поля p_t:

$$((\Phi^{(j)}_{p_{nm}})_{conv})_{\text{Corcos}} \approx ((\Phi^{(j)}_{p_{nm}})_{conv})_{\text{FW}} \approx ((\Phi^{(j)}_{p_{nm}})_{conv})_{\text{Sm–Tk}} \approx ((\Phi^{(j)}_{p_{nm}})_{conv})_{\text{Chase}},$$

$$((S_w)_{conv})_{\text{Corcos}} \approx ((S_w)_{conv})_{\text{FW}} \approx ((S_w)_{conv})_{\text{Sm–Tk}} \approx ((S_w)_{conv})_{\text{Chase}}.$$

Величина ж доданка $(\Phi^{(j)}_{p_{nm}})_{low_w_n}$, а отже і значення відповідної частини $(S_w)_{low_w_n}$, буде різною для різних моделей тиску p_t:

$$((\Phi^{(j)}_{p_{nm}})_{low_w_n})_{\text{Corcos}} > ((\Phi^{(j)}_{p_{nm}})_{low_w_n})_{\text{FW}} > ((\Phi^{(j)}_{p_{nm}})_{low_w_n})_{\text{Sm–Tk}} >$$

$$> ((\Phi^{(j)}_{p_{nm}})_{low_w_n})_{\text{Chase}},$$

$$((S_w)_{low_w_n})_{\text{Corcos}} > ((S_w)_{low_w_n})_{\text{FW}} > ((S_w)_{low_w_n})_{\text{Sm–Tk}} > ((S_w)_{low_w_n})_{\text{Chase}}.$$

Такі співвідношення між внесками складових поля p_t в реакцію трубки S_w у рамках досліджуваних моделей спектра Φ_p і спричиняють зображені на рис. 1 відмінності між положенням кривих *2–5*.

Подібні результати порівняння даних розрахунку спектра S_w з відповідними експериментальними даними були одержані і для інших значень параметрів задачі. Це дає підстави говорити про те, що у випадку розвиненої турбулентної течії, яка характеризується осьовою симетрією і малим числом Маха, прийнятні для потреб практики результати (тобто у межах 7–10% відносної похибки) можна одержати у рамках моделі Чейза. Виходячи з цього, можна рекомендувати її використання для опису пульсацій тиску, які виникають на поверхнях циліндричних конструкцій при їх взаємодії із зазначеним типом течій.

Серед решти моделей пульсацій тиску на плоскій стінці найбільш прийнятною для цього є модель Смолякова і Ткаченка. Про модель Фокс Вілліамса поки нічого сказати не можна. Причиною цього є її недоліки [2, 3]. Очевидно, що їх виправлення дозволить детальніше вивчити можливості моделі (4).

Що ж стосується моделі Коркоса, то її використання для опису пульсацій тиску на поверхнях циліндричних конструкцій може бути виправданим лише у разі домінування в коливальних і/або акустичних полях таких конструкцій внеску конвективних складових поля p_t (за цієї умови оцінки зазначених полів для всіх моделей тиску p_t практично збігатимуться [3]). Проте це можливо лише у разі течій з великими числами Маха ($M \approx 1$, $M > 1$) [2, 3], або ж у разі прямого випромінювання турбулентних течій. А такі випадки у даній роботі не розглядаються.

Відсутність осьової симетрії течії. Зіставлення результатів розрахунку спектра S_w для випадку асиметричної течії з відповідними експериментальними даними показує, що знову найкращі результати одержуються при використанні моделі Чейза. При цьому виявляється, що відносна похибка Δ_r (для всіх моделей тиску p_t) зменшується із зменшенням ступеня асиметрії течії і/або кривизни поверхні. І навпаки, збільшення цих параметрів приводить до збільшення величини Δ_r (ступінь асиметрії течії і кривизна поверхні контролювалися ексцентриситетом вставки і радіусом поперечного перерізу трубки відповідно [1]).

Проте, на відміну від випадку осесиметричної течії, тут у всіх ситуаціях похибка Δ_r перевищувала прийняту у прикладних дослідженнях межу 10% [2] (для моделі Чейза величина Δ_r коливалась у межах 15–27%, а для решти моделей вона була ще більшою). Такий результат загалом вказує на недоцільність використання моделей (2)–(5) для опису пульсацій тиску, які виникають на поверхнях циліндричних конструкцій при їх взаємодії з розвиненими турбулентними асиметричними течіями нестисливої рідини. У разі ж застосування цих моделей похибка буде найменшою для моделі Чейза. Вона зростатиме зі збільшенням ступеня асиметрії течії і/або кривизни поверхні, і навпаки, зменшуватиметься зі зменшенням цих параметрів.

3. Таким чином, у даній роботі з'ясовано умови, за яких моделі пульсацій тиску p_t на плоскій стінці можна використовувати для опису поля p_t, яке виникає на поверхнях циліндричних конструкцій при їх взаємодії з розвиненими турбулентними течіями нестисливої рідини. Для цього було розроблено відповідний метод і створене необхідне експериментальне обладнання. Одержані при цьому результати та їх аналіз дозволяють зробити такі висновки.

1. У випадку осьової симетрії течії:

прийнятні для потреб практики результати розрахунку коливальних і/або акустичних полів циліндричних конструкцій (тобто у межах 7–10% відносної похибки) можна одержати у рамках моделі Чейза; виходячи з цього, можна рекомендувати її використання для опису поля пульсацій тиску, яке виникає на поверхнях циліндричних конструкцій при їх взаємодії із зазначеним типом течій;

серед решти моделей пульсацій тиску на плоскій стінці найбільш прийнятною для цього є модель Смолякова і Ткаченка;

про модель Фокс Вілліамса поки нічого сказати не можна; причиною цього є її недоліки; очевидно, що їх виправлення дозволить детальніше вивчити можливості зазначеної моделі;

використання моделі Коркоса для опису тиску p_t на поверхнях циліндричних конструкцій може бути виправданим лише у разі домінування в коливальних і/або акустичних полях таких конструкцій внеску конвективних складових поля p_t (за цієї умови оцінки зазначених полів для всіх моделей тиску p_t практично збігатимуться); проте це можливо лише у разі течій з великими числами Маха, або ж у разі прямого випромінювання турбулентних течій, а такі випадки у даній роботі не розглядалися.

2. У випадку відсутності осьової симетрії течії використання зазначених моделей тиску p_t є недоцільним. У разі ж їх застосування похибка розрахунку буде найменшою для моделі Чейза і збільшуватиметься/зменшуватиметься зі збільшенням/зменшенням ступеня асиметрії течії і(або) кривизни поверхні.

1. *Борисюк А. О.* Про використання моделей пульсацій тиску на плоскій стінці для опису пульсацій тиску на поверхнях циліндричних конструкцій // Доп. НАН України. – 2007. – № 9. – С. 47–53.
2. *Blake W. K.* Mechanics of flow-induced sound and vibration: in 2 vols. – New York: Academic Press, 1986. – 974 p.
3. *Borisyuk A. O., Grinchenko V. T.* Vibration and noise generation by elastic elements excited by a turbulent flow // J. Sound Vibr. – 1997. – **204**, No 2. – P. 213–237.

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Надійшло до редакції 29.11.2007