УДК 517.9

Н. Л. Денисенко

Про існування неперервних на $\mathbb{R}^+$ розв'язків систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

New sufficient conditions of the existence of solutions continuously differentiable on $\mathbb{R}^+$ to the system of nonlinear differential-functional equations with a linearly transformed argument have been obtained.

Розглянемо систему диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(\lambda t) + f(t, x(t), x(\lambda t)), \tag{1}$$

де $0 < \lambda < 1$, $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $A(t)$, $B(t)$ — дійсні, $(n\times n)$-матричні функції, $f(t, x, y)\colon \mathbb{R}^+ \times \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Різні частинні випадки таких рівнянь досліджувались багатьма математиками, і в даний час існує велика кількість результатів, які одержані при дослідженні різних питань їх теорії (див. [1–6] і наведену там бібліогр.). Так, наприклад, в [1] достатньо повно розглянуто існування і асимптотичні властивості розв'язків скалярного рівняння ($n = 1$) зі сталими коефіцієнтами при $f \equiv 0$, в [3] одержані достатні умови існування та єдиності обмеженого на всій дійсній осі розв'язку системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу, в [4] досліджено питання існування неперервних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків лінійної системи рівнянь (1) (у випадку $f(t, x(t), x(\lambda t)) \equiv f(t)$). Оскільки для нелінійної системи рівнянь розроблений в [4] метод дослідження не дає бажаного результату, то в даній роботі пропонується новий підхід, який дає можливість отримати аналогічні результати для системи нелінійних рівнянь вигляду (1).

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) усі елементи матриць $A(t)$, $B(t)$ є неперервними, обмеженими при $t \in \mathbb{R}^+$ функціями і $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} |A(t)| \leqslant a < \infty$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} |B(t)| \leqslant b < \infty$, де $|A(t)| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)|$;

2) усі компоненти вектора $f(t, x, y)$ є неперервними за всіма змінними при $t \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ функціями і виконується співвідношення $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} |f(t, 0, 0)| \leqslant f^* < \infty$;

3) вектор-функція $f(t, x, y)$ задовольняє умову

$$|f(t, \widetilde{x}, \widetilde{y}) - f(t, \widetilde{\widetilde{x}}, \widetilde{\widetilde{y}})| \leqslant l(|\widetilde{x} - \widetilde{\widetilde{x}}| + |\widetilde{y} - \widetilde{\widetilde{y}}|),$$

де $(t, \widetilde{x}, \widetilde{y})$, $(t, \widetilde{\widetilde{x}}, \widetilde{\widetilde{y}}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $l = \mathrm{const} > 0$. Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервно диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $\overline{x}(t) = \overline{x}(t, c)$, де $c = (c_1, \ldots, c_n)$, c_i, $i = \overline{1, n}$, — довільні сталі.

Доведення. Розв'язки рівняння (1) будемо будувати у вигляді

$$\overline{x}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t), \tag{2}$$

де $x_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — деякі функції, які задовольняють послідовність рівнянь

$$\begin{aligned} &x_0'(t) = 0, \\ &x_1'(t) = A(t)x_0(t) + B(t)x_0(\lambda t) + f(t, x_0(t), x_0(\lambda t)), \\ &x_k'(t) = A(t)x_{k-1}(t) + B(t)x_{k-1}(\lambda t) + \\ &\qquad + f\left(t, \sum_{i=0}^{k-1} x_i(t), \sum_{i=0}^{k-1} x_i(\lambda t)\right) - f\left(t, \sum_{i=0}^{k-2} x_i(t), \sum_{i=0}^{k-2} x_i(\lambda t)\right), \qquad k = 2, 3, \ldots. \end{aligned} \tag{3}$$

Безпосередньо можна переконатися, що функції

$$\begin{aligned} &x_0(t) = c, \qquad \text{де} \qquad c = (c_1, \ldots, c_n), \quad c_i, \quad i = \overline{1, n}, \ \text{— довільні сталі}, \\ &x_1(t) = \int_0^t (A(\tau)x_0(\tau) + B(\tau)x_0(\lambda\tau) + f(\tau, x_0(\tau), x_0(\lambda\tau)))\, d\tau, \\ &x_k(t) = \int_0^t \left(A(\tau)x_{k-1}(\tau) + B(\tau)x_{k-1}(\lambda\tau) + f\left(\tau, \sum_{i=0}^{k-1} x_i(\tau), \sum_{i=0}^{k-1} x_i(\lambda\tau)\right) - \right. \\ &\qquad \left. - f\left(\tau, \sum_{i=0}^{k-2} x_i(\tau), \sum_{i=0}^{k-2} x_i(\lambda\tau)\right)\right) d\tau, \qquad k = 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

є неперервно диференційовними при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язками відповідних систем рівнянь (3).

Доведемо, що ряд (2), члени якого визначаються формулами (4), рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^+$. Дійсно, згідно з умовами теореми із (4) маємо

$$\begin{aligned} &|x_0(t)| = |c| = \overline{c}, \\ &|x_1(t)| \leqslant \int_0^t (|A(\tau)||x_0(\tau)| + |B(\tau)||x_0(\lambda\tau)| + |f(\tau, x_0(\tau), x_0(\lambda\tau))|)\, d\tau \leqslant \\ &\qquad \leqslant \int_0^t (|A(\tau)||x_0(\tau)| + |B(\tau)||x_0(\lambda\tau)| + |f(\tau, x_0(\tau), x_0(\lambda\tau)) - f(\tau, 0, 0)| + |f(\tau, 0, 0)|)\, d\tau \leqslant \\ &\qquad \leqslant \int_0^t (|A(\tau)||x_0(\tau)| + |B(\tau)||x_0(\lambda\tau)| + l(|x_0(\tau)| + |x_0(\lambda\tau)|) + |f(\tau, 0, 0)|)\, d\tau \leqslant \\ &\qquad \leqslant ((a + b + 2l)\overline{c} + f^*)t = a_1 t, \end{aligned}$$

де $a_1 = (a+b+2l)\overline{c} + f^*$. Розмірковуючи за індукцією, покажемо, що для всіх $k \geqslant 1$ виконується оцінка

$$|x_k(t)| \leqslant a_k t^k, \tag{5}$$

де

$$a_1 = (a+b+2l)\overline{c} + f^*, \qquad a_{k+1} = a_k \frac{a + b\lambda^k + l(1+\lambda^k)}{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Справді, при $k = 1$ оцінка (5) має місце. Припустимо, що оцінка (5) уже доведена для деякого $k \geqslant 1$ і покажемо, що вона не зміниться при переході від k до $k+1$. Дійсно, беручи до уваги (4), (5), одержуємо

$$\begin{aligned}
|x_{k+1}(t)| \leqslant \int\limits_0^t \Biggl(& |A(\tau)|\,|x_k(\tau)| + |B(\tau)|\,|x_k(\lambda\tau)| + \\
& + \left| f\left(\tau, \sum_{i=0}^{k} x_i(\tau), \sum_{i=0}^{k} x_i(\lambda\tau)\right) - f\left(\tau, \sum_{i=0}^{k-1} x_i(\tau), \sum_{i=0}^{k-1} x_i(\lambda\tau)\right)\right| \Biggr) d\tau \leqslant \\
& \leqslant \int\limits_0^t \Biggl(|A(\tau)|\,|x_k(\tau)| + |B(\tau)|\,|x_k(\lambda\tau)| + \\
& \quad + l\left(\left|\sum_{i=0}^{k} x_i(\tau) - \sum_{i=0}^{k-1} x_i(\tau)\right| + \left|\sum_{i=0}^{k} x_i(\lambda\tau) - \sum_{i=0}^{k-1} x_i(\lambda\tau)\right| \right)\Biggr) d\tau \leqslant \\
& \leqslant \int\limits_0^t (|A(\tau)||x_k(\tau)| + |B(\tau)||x_k(\lambda\tau)| + l(|x_k(\tau)| + |x_k(\lambda\tau)|))\, d\tau \leqslant \\
& \leqslant \int\limits_0^t (a a_k \tau^k + b a_k (\lambda\tau)^k + l(a_k\tau^k + a_k(\lambda\tau)^k))\, d\tau = \\
& = a_k(a + b\lambda^k + l(1+\lambda^k)) \frac{t^{k+1}}{k+1} = a_{k+1} t^{k+1}.
\end{aligned}$$

Цим самим доведено, що оцінка (5) має місце для довільного $k \geqslant 1$. Оскільки (на підставі (5)) на будь-якому відрізку $[0, T] \subset \mathbb{R}^+$ маємо

$$|x_k(t)| \leqslant a_k T^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

і

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}T^{k+1}}{a_k T^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{a + b\lambda^k + l(1+\lambda^k)}{k+1} T = 0,$$

то, очевидно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k T^k$ збігається. Тоді з урахуванням (6) ряд (2) також рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[0, T] \subset \mathbb{R}^+$ до деякої неперервної вектор-функції $\overline{x}(t)$.

Беручи до уваги умови теореми і співвідношення (3), аналогічно можна показати, що виконуються оцінки

$$|x_0'(t)| = 0, \qquad |x_k'(t)| \leqslant k a_k t^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Оскільки на будь-якому відрізку $[0, T] \subset \mathbb{R}^+$ маємо

$$|x_k'(t)| \leqslant k a_k T^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

і

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)a_{k+1}T^k}{k a_k T^{k-1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{a + b\lambda^k + l(1+\lambda^k)}{k} T = 0,$$

то, очевидно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k a_k T^{k-1}$ збігається. Тоді згідно з (8) ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k'(t)$ також рівномірно збігається на відрізку $[0, T]$.

Покажемо, що $\overline{x}(t)$ є розв'язком системи рівнянь (1), тобто

$$\dot{\overline{x}}(t) \equiv A(t)\overline{x}(t) + B(t)\overline{x}(\lambda t) + f(t, \overline{x}(t), \overline{x}(\lambda t)).$$

Для цього (на підставі (3), (4)) достатньо показати, що при $t \in \mathbb{R}^+$ виконується тотожність

$$f(t, \overline{x}(t), \overline{x}(\lambda t)) \equiv f(t, x_0(t), x_0(\lambda t)) + \\ + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[f\left(t, \sum_{k=0}^{m} x_k(t), \sum_{k=0}^{m} x_k(\lambda t)\right) - f\left(t, \sum_{k=0}^{m-1} x_k(t), \sum_{k=0}^{m-1} x_k(\lambda t)\right) \right], \tag{9}$$

або

$$\lim_{m\to+\infty} f\left(t, \sum_{k=0}^{m} x_k(t), \sum_{k=0}^{m} x_k(\lambda t)\right) = f\left(t, \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t), \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(\lambda t)\right),$$

де функції $x_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, визначені співвідношеннями (4).

Нехай ε — довільне додатне число. Покажемо, що можна вказати таке число $N > 0$, що при всіх $t \in \mathbb{R}^+$ і $m > N$ виконується нерівність

$$\left| f\left(t, \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t), \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(\lambda t)\right) - f\left(t, \sum_{k=0}^{m} x_k(t), \sum_{k=0}^{m} x_k(\lambda t)\right) \right| < \varepsilon.$$

Оскільки ряд (2) рівномірно збігається до неперервної при $t \in [0, T]$ (де T — довільне додатне число) функції $\overline{x}(t)$, то існує таке число $N_1 > 0$, що при всіх $t \in [0, T]$ і $m > N_1$ виконується нерівність

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t) - \sum_{k=0}^{m} x_k(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2l}.$$

Візьмемо число $N := N_1$. Тоді згідно з умовою *3* теореми отримаємо

$$\left| f\left(t, \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t), \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(\lambda t)\right) - f\left(t, \sum_{k=0}^{m} x_k(t), \sum_{k=0}^{m} x_k(\lambda t)\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant l\left(\left|\sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t) - \sum_{k=0}^{m} x_k(t)\right| + \left|\sum_{k=0}^{+\infty} x_k(\lambda t) - \sum_{k=0}^{m} x_k(\lambda t)\right|\right) < l\left(\frac{\varepsilon}{2l} + \frac{\varepsilon}{2l}\right) = \varepsilon$$

при всіх $t \in [0, T]$ і $m > N$. Тим самим доведено, що тотожність (9) виконується при $t \in \mathbb{R}^+$ (на підставі довільності T).

Таким чином, сума $\overline{x}(t)$ ряду (2) є сім'єю неперервно диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $\overline{x}(t) = \overline{x}(t, c)$ системи рівнянь (1). Теорему доведено.

Аналогічні результати мають місце і для більш загальних систем рівнянь. Зокрема, для системи диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(\varphi(t)) + f(t, x(t), x(\varphi(t))), \tag{10}$$

має місце така теорема.

Теорема 2. *Якщо матричні функції $A(t)$, $B(t)$ і вектор-функція $f(t, x, y)$ задовольняють умови теореми 1, а $\varphi(t)$ є неперервною при $t \in \mathbb{R}^+$ функцією такою, що $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant t$, то система рівнянь (10) має сім'ю неперервно диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = x(t, c)$, де $c = (c_1, \ldots, c_n)$, c_i, $i = \overline{1, n}$, — довільні сталі.*

Зауваження. Одержані вище результати можна також узагальнити на системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з багатьма відхиленнями аргументу вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)x(\lambda_i t) + f(t, x(t), x(\lambda_1 t), \ldots, x(\lambda_m t)), \tag{11}$$

де $0 < \lambda_i < 1$, $i = \overline{1, m}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $A(t)$, $B_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, — дійсні, $(n \times n)$-матричні функції, $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Робота частково підтримана проектом Ф25.1/021.

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – **77**. – P. 891–937.
2. *Kwapisz M.* On the existence and uniqueness of solutions of certain integral-differential equation // Ann. Pol. Math. – 1975. – **31**, No 1. – P. 23–41.
3. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 737–747.
4. *Денисенко Н. Л.* Про неперервно диференційовні на $\mathbb{R}^+$ розв'язки систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 322–327.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1984. – 412 с.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 14.11.2007