УДК 517.95

С. П. Лавренюк, Г. Р. Торган

Мішана задача для нелінійного параболічного рівняння з другою похідною за часом в необмеженій області

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

We have obtained some sufficient conditions of existence of a generalized solution of the initial boundary-value problem for a nonlinear parabolic equation of the fourth order with the second time derivative in an unbounded domain with respect to spatial variables.

Рівняння з другою похідною за часом і четвертими похідними за просторовими змінними вигляду

$$u_{tt} = \operatorname{div} \sigma(\nabla u) + \triangle u_t - \delta^2 \triangle^2 u, \tag{1}$$

де $\sigma \geqslant 0$, $0 < \delta < 1$, моделюють процеси фазового переходу у в'язкопружних середовищах з капілярністю. У працях [1, 2] розглянуто частковий випадок рівняння (1), коли присутня одна просторова змінна. Зазначимо, що задачі для рівнянь типу (1) з різними нелінійностями досліджено у роботах [3–9].

У цій роботі одержано деякі достатні умови існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку з другою похідною за часовою змінною в необмеженій за просторовими змінними області.

Нехай Ω — необмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \bigcap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$; $\Omega^R = \Omega \bigcap B^R$, де $B^R = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < R\}$, $Q_T^R = \Omega^R \times (0,T)$, $\Omega_\tau^R = Q_T^R \bigcap \{t = \tau\}$. Припускатимемо, що область Ω^R є областю регулярною за Кальдероном [10, с. 44] для всіх $R > 1$.

В області Q_T розглянемо задачу для рівняння з дійснозначними коефіцієнтами

$$A(u) \equiv u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t) u_{t x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x,t) |u_{t x_i}|^{p-2} u_{t x_i})_{x_i} + a_0(x,t)|u_t|^{q-2} u_t + c_0(x,t) u = f(x,t) \tag{2}$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \tag{3}$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0, \tag{4}$$

де ν — зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega \times (0,T)$, $p > 2$, $q > 1$.

Нехай $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \{u \colon u \in L^q(\Omega^R), \forall R > 1\}$; $H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \{u \colon u \in H^1(\Omega^R), u|_{\partial\Omega B^R} = 0, \forall R > 1\}$; $W^{1,p}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \{u \colon u \in W^{1,p}(\Omega^R),\ u|_{\partial\Omega \cap B^R} = 0,\ \forall R > 1\}$; $L^2((0,T); L^2_\theta(\Omega))$ — замикання множини функцій $C_0^\infty(Q_T)$ за нормою $\|u\|_{L^2((0,T);L^2_\theta(\Omega))} = \Big(\int\limits_{Q_T} |u|^2 e^{-\theta\sqrt{|x|^2+1}} dxdt\Big)^{1/2}$, $\theta > 0$; $L^2((0,T);H^2_{0,\theta}(\Omega))$ — замикання множини функцій $C_0^\infty(Q_T)$ за нормою $\|u\|_{L^2((0,T);H^2_{0,\theta}(\Omega))} = \Big(\int\limits_{Q_T} \Big[|u|^2 + \sum\limits_{i,j=1}^{n} |u_{x_ix_j}|^2\Big] e^{-\theta\sqrt{|x|^2+1}} dxdt\Big)^{1/2}$; $L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\theta}(\Omega))$ — замикання множини $C_0^\infty(Q_T)$ за нормою $\|u\|_{L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\theta}(\Omega))} = \Big(\int\limits_{Q_T} \Big[|u|^p + \sum\limits_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p\Big] e^{-\theta\sqrt{|x|^2+1}} dxdt\Big)^{1/p}$; $V_0(\Omega^R) = H^2_0(\Omega^R) \bigcap H^4(\Omega^R) \bigcap W^{1,2p-4}(\Omega^R) \bigcap W^{1,p}_0(\Omega^R) \bigcap L^{2q-2}(\Omega^R)$.

Припустимо виконання таких умов:

(A): $a^{sl}_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, a_{ij}, a_{ijt}, a_{ijtt}, a_i, a_{it}, a_0, $a_{0t} \in L^\infty(Q_T)$, $i,j,s,l \in \{1,\ldots,n\}$, $D^k a^{sl}_{ij}(\cdot,0)$, $D^1 a_{ij}(\cdot,0)$, $D^1 a_i(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega)$, де $k \leqslant 2$, $D^k = \partial^{|\alpha|}/(\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n})$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\sum\limits_{i,j,s,l=1}^{n} a^{sl}_{ij}(x)\xi_{ij}\xi_{sl} \geqslant A_0 \sum\limits_{i,j=1}^{n} |\xi_{ij}|^2$, $A_0 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij} = \xi_{ji}$, $\sum\limits_{i,j=i}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \gamma_1 \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$, $\gamma_1 > 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$ і всіх $\xi_i \in \mathbb{R}$, $a^{sl}_{ij}(x) = a^{ij}_{sl}(x)$, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$, $0 < \chi_0 \leqslant a_i(x,t) \leqslant \chi_1$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$ і всіх $i \in \{1,\ldots,n\}$; $a_0(x,t) \geqslant \chi_2 > 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$;

(C): c_0, $c_{0t} \in L^\infty(Q_T)$.

Означення 1. Функцію $u \in L^2((0,T);H^2_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$ таку, що $u_t \in L^p((0,T);\ W^{1,p}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) \bigcap L^q((0,T);\ L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) \bigcap L^2((0,T);\ H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$, називаємо узагальненим розв'язком задачі (2)–(4), якщо вона задовольняє початкові умови (3) і рівність (2) в області Q_T в сенсі розподілів.

Розглянемо допоміжну задачу:

$$A(u) = f^R(x,t), \qquad (x,t) \in Q^R_T, \tag{5}$$

$$u(x,0) = u^R_0(x), \qquad u_t(x,0) = u^R_1(x), \qquad x \in \Omega^R, \tag{6}$$

$$u\big|_{\partial\Omega^R\times(0,T)} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega^R\times(0,T)} = 0, \tag{7}$$

де

$$R > 1,\ f^R(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q^R_T \\ 0, & (x,t) \in Q_T \setminus Q^R_T \end{cases},\ u^R_0(x) = u_0(x)\rho_R(x),\ u^R_1(x) = u_1(x)\rho_R(x),$$

$$\rho_R \in C^4(\mathbb{R}^n), \qquad \rho_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant R-1 \\ 0, & |x| \geqslant R \end{cases}, \quad 0 \leqslant \rho_R(x) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Означення 2. Функцію $u \in L^2((0,T);H^2_0(\Omega^R))$ таку, що $u_t \in L^p((0,T);\ W^{1,p}_0(\Omega^R)) \bigcap L^q(Q^R_T)$, $u_{tt} \in L^2(Q^R_T)$ і яка задовольняє початкові умови (6) та рівність

$$\int\limits_{Q^R_\tau} [u_{tt}v + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a^{sl}_{ij}(x)u_{x_ix_j}v_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{tx_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}|^{p-2}u_{tx_i}v_{x_i} + {}$$
$$+ a_0(x,t)|u_t|^{q-2}u_tv + c_0(x,t)uv - f^R(x,t)v]\, dxdt = 0 \tag{8}$$

для довільних $\tau \in (0,T]$ і $v \in L^2((0,T); H_0^2(\Omega^R)) \bigcap L^p((0,T); W_0^{1,p}(\Omega^R)) \bigcap L^q(Q_T^R)$, називаємо узагальненим розв'язком задачі (5)–(7).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (A), (C), $f \in L^{q'}(Q_T^R)$, $f_t \in L^2(Q_T^R)$, $u_0^R \in H_0^2(\Omega^R) \bigcap H^4(\Omega^R)$, $u_1^R \in H_0^1(\Omega^R) \bigcap H^2(\Omega^R) \bigcap W^{1,2p-4}(\Omega^R) \bigcap L^{2q-2}(\Omega^R)$, $p > 2$, $q > 1$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі* (5)–(7).

Доведення. Використаємо метод Фаедо–Гальоркіна. Оскільки простір $V_0(\Omega^R)$ — сепарабельний банахів, то в ньому існує така зліченна множина $\{\varphi^h\}$, що будь-яка скінченна кількість елементів цієї множини лінійно незалежна і замикання її лінійної оболонки в $V_0(\Omega^R)$ збігається з цим простором. Можемо прийняти, що $\{\varphi^h\}$ ортонормована в $L^2(\Omega^R)$.

Розглянемо функції $u^N(x,t) = \sum\limits_{h=1}^{N} c_h^N(t)\varphi^h(x)$, $N = 1, 2\ldots$, де $c_1^N, c_2^N, \ldots, c_N^N$ — розв'язки відповідних задач Коші

$$\int\limits_{\Omega^R} \Bigg[u_{tt}^N \varphi^h + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^N \varphi_{x_s x_l}^h + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^N \varphi_{x_j}^h + a_0(x,t)|u_t^N|^{q-2} u_t^N \varphi^h +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}^N|^{p-2} u_{tx_i}^N \varphi_{x_i}^h + c_0(x,t) u^N \varphi^h - f^R(x,t)\varphi^h\Bigg] dx = 0, \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$c_h^N(0) = u_{0,h}^{R,N}, \qquad c_{ht}^N(0) = u_{1,h}^{R,N}, \qquad h = 1, \ldots, N, \tag{10}$$

де

$$\begin{aligned} u_0^{R,N}(x) &= \sum_{h=1}^{N} u_{0,h}^{R,N} \varphi^h(x), \quad \|u_0^{R,N} - u_0^R\|_{H_0^2(\Omega^R) \cap H^4(\Omega^R)} \to 0, \\ u_1^{R,N}(x) &= \sum_{h=1}^{N} u_{1,h}^{R,N} \varphi^h(x), \quad \|u_1^{R,N} - u_1^R\|_{H_0^1(\Omega^R) \cap H^2(\Omega^R) \cap W^{1,2p-4}(\Omega^R) \cap L^{2q-2}(\Omega^R)} \to 0 \end{aligned} \tag{11}$$

при $N \to \infty$.

На підставі теореми Каратеодорі [11, с. 54] існує розв'язок задачі (9), (10), який має абсолютно неперервну похідну на проміжку $[0, t_N]$. З оцінок, одержаних нижче, випливає, що $t_N = T$.

Домножимо (9) на c_{ht}^N, підсумуємо за h від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau \in (0,T]$:

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^N u_{tx_s x_l}^N + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^N u_{tx_j}^N + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i}^N|^p +$$

$$+ a_0(x,t)|u_t^N|^q + c_0(x,t) u^N u_t^N - f^R(x,t) u_t^N\Bigg] dxdt = 0. \tag{12}$$

На підставі рівності (12) і умов теореми легко одержати такі оцінки:

$$\begin{aligned} &\|u^N\|_{L^\infty((0,T); H_0^2(\Omega^R))} \leqslant K_1, \\ &\|u_t^N\|_{L^\infty((0,T); L^2(\Omega^R)) \cap L^2((0,T); H_0^1(\Omega^R)) \cap L^q(Q_T^R) \cap L^p((0,T); W_0^{1,p}(\Omega^R))} \leqslant K_1, \end{aligned} \tag{13}$$

де стала K_1 не залежить від N. Диференціюючи за t рівність (9) і враховуючи умови теореми (A), (C), можемо переконатися в правильності оцінок

$$\begin{aligned} &\|u_t^N\|_{L^2((0,T);H_0^2(\Omega^R))\cap L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R))\cap L^q(Q_T^R)} \leqslant K_2, \\ &\|u_{tt}^N\|_{L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega^R))} \leqslant K_2, \end{aligned} \tag{14}$$

причому K_2 не залежить від N.

Введемо оператор

$$A\colon L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R))\bigcap L^q(Q_T^R) \to L^{p'}((0,T);W^{-1,p'}(\Omega^R)) + L^{q'}(Q_T^R)$$

за допомогою формули

$$\langle A(u),v\rangle = \int\limits_{Q_T^R}\left[\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u_{tx_i}|^{p-2}u_{tx_i}v_{tx_i} + a_0(x,t)|u_t|^{q-2}u_t v_t\right]dxdt,$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярний добуток між елементами простору $L^{p'}((0,T);W^{-1,p'}(\Omega^R)) + L^{q'}(Q_T^R)$ і $L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R))\bigcap L^q(Q_T^R)$. Враховуючи умову (14), легко показати, що

$$\|A(u^N)\|_{L^{p'}((0,T);W^{-1,p'}(\Omega^R))+L^{q'}(Q_T^R)} \leqslant K_4, \tag{15}$$

де стала K_4 не залежить від N. Отже, на підставі (14), (15) існує підпослідовність $\{u^{N_k}\}\subset$ $\subset\{u^N\}$ така, що

$$\begin{aligned} &u^{N_k}\to u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega^R)), \\ &u_t^{N_k}\to u_t \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega^R)), \\ &u_t^{N_k}\to u_t \quad \text{слабко в} \quad L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R))\cap L^q(Q_T^R)\cap L^2((0,T);H_0^1(\Omega^R)), \\ &u_{tt}^{N_k}\to u_{tt} \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty((0,T);L^2(\Omega^R)), \\ &u_{tt}^{N_k}\to u_{tt} \quad \text{слабко в} \quad L^2((0,T);H_0^1(\Omega^R)), \\ &A(u^{N_k})\to\chi \quad \text{слабко в} \quad L^{p'}((0,T);W^{-1,p'}(\Omega^R))+L^{q'}(Q_T^R)) \quad \text{при} \quad N_k\to\infty. \end{aligned} \tag{16}$$

На підставі (16) легко одержати рівність

$$\begin{aligned} &\int\limits_{Q_\tau^R}\left[u_{tt}\eta + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\eta_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{tx_i}\eta_{x_j} + c_0(x,t)u\eta\right]dxdt + \langle\chi,\eta\rangle = \\ &\qquad = \int\limits_{Q_\tau^R} f^R(x,t)\eta dxdt, \end{aligned} \tag{17}$$

яка виконується для довільного $\eta\in L^2((0,T);H_0^2(\Omega^R))\bigcap L^p((0,T);W_0^{1,p}(\Omega^R))\bigcap L^q(Q_T^R)$.

Доведемо, що $A(u) = \chi$. Розглянемо послідовність

$$0 \leqslant y_k = \langle A(u^{N_k}), u^{N_k} \rangle - \langle A(v), u^{N_k} - v \rangle - \langle A(u^{N_k}), v \rangle = \int\limits_{Q_T^R} \Big[f^R(x,t) u_t^{N_k} - u_{tt}^{N_k} u_t^{N_k} -$$

$$- \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{N_k} u_{t x_s x_l}^{N_k} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{t x_i}^{N_k} u_{t x_j}^{N_k} - c_0(x,t) u^{N_k} u_t^{N_k} \Big] dxdt -$$

$$- \langle A(v), u^{N_k} - v \rangle - \langle A(u^{N_k}), v \rangle.$$

Перейдемо в останній нерівності до верхньої границі при $N_k \to \infty$. Використовуючи лему 5.3 з роботи [10, с. 20], отримаємо

$$0 \leqslant \int\limits_{Q_T^R} \Big[f^R(x,t) u_t - \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{t x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{t x_i} u_{t x_j} - c_0(x,t) u u_t \Big] dxdt -$$

$$- \langle A(v), u - v \rangle - \langle \chi, v \rangle - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_T^R} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0^R} |u_1^R|^2 dx. \qquad (18)$$

У формулі (17) приймемо $\eta = u_t$ і, враховуючи можливість інтегрування частинами, матимемо рівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_T^R} |u_t|^2 dx + \int\limits_{Q_T^R} \Big[\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{t x_s x_l} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{t x_i} u_{t x_j} + c_0(x,t) u u_t -$$

$$- f^R(x,t) u_t \Big] dxdt + \langle \chi, \eta \rangle = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0^R} |u_1^R|^2 dx. \qquad (19)$$

Додавши (18) та (19) і прийнявши $u - v = \lambda \omega$, $\lambda > 0$, $\omega \in L^p((0,T); W_0^{1,p}(\Omega^R)) \bigcap L^q(Q_T^R)$, одержимо

$$\langle \chi - A(u - \lambda \omega), \lambda \omega \rangle \geqslant 0.$$

Звідси матимемо, що

$$\chi = A(u). \qquad (20)$$

Підставимо (20) у (17), отримаємо рівність (8) з означення узагальненого розв'язку задачі (5)–(7).

Виконання початкових умов доводимо аналогічно як в теоремі 1.1 з роботи [12, с. 20].

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (A), (C) *і, крім того,*

$$p > 2, \qquad q = p, \qquad \theta \in \left(0, \left[\frac{\chi_2 p (p' \chi_0)^{p-1}}{n \chi_1^p} \right]^{1/p} \right),$$

$$F := \int\limits_{\Omega} \left[|u_1|^2 + |u_0|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |u_{0x_ix_j}|^2 \right] e^{-\theta\sqrt{|x|^2+1}} dx + \int\limits_{Q_T} |f(x,t)|^{p'} e^{-\theta\sqrt{|x|^2+1}} dxdt < \infty.$$

Тоді існує узагальнений розв'язок u задачі (2)–(4) *і для нього правильна оцінка*

$$\int\limits_{Q_T} \left[|u_t|^2 + |u|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x_ix_j}|^2 + |u_t|^p + \sum_{i=1}^{n} |u_{tx_i}|^p \right] e^{-\theta\sqrt{|x|^2+1}} dxdt \leqslant \mu F,$$

де стала μ *не залежить від u.*

Очевидно область Ω можемо апроксимувати послідовністю областей $\{\Omega^k\}$: $\Omega = \bigcup\limits_{k=2}^{\infty} \Omega^k$. Тоді згідно з теоремою 1 одержимо послідовність функцій $\{u^k\}$, кожна з яких є узагальненим розв'язком задачі (5)–(7) відповідно в області Q_T^k і продовжена нулем на область $Q_T \setminus Q_T^k$. Користуючись методами монотонності і компактності, встановлюємо, що границя послідовності $\{u^k\}$ у відповідному просторі є узагальненим розв'язком задачі (2)–(4).

Зауваження 1. Якщо $2 < q < p$, область Ω лежить в шарі $\gamma_0 < x_1 < \gamma^0$, то можна довести теорему, аналогічну до теореми 2, тобто встановити існування розв'язку задачі (2)–(4) у просторі зростаючих функцій.

1. *Kallies W. D., Holmes P. J.* On a dynamical model for phase transformation in nonlinear elasticity // Pattern formation: symmetry methods and applications / Eds. J. Chadam, M. Golubitsky, W. Langford, B. Wetton. Fields Institute Communications 5, AMS. – Providence, 1996.
2. *Kallies W. D.* Regularized models of phase transformation in one-dimensional nonlinear elasticity / Ph. D. Thesis. – Cornell University, 1994.
3. *Rybka P., Hoffmann K.-H.* Convergence of solutions to the equation of quasi-static approximation of viscoelasticity with capillarity // J. Math. Anal. and Appl. – 1998. – **226**, No 1. – C. 61–81.
4. *Abeyaratne R., Knowles J. K.* Kinetic relations and propagation of phase boundaries in solids // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1991. – **114**. – P. 119–154.
5. *Abeyaratne R., Knowles J. K.* Implications of viscosity and strain gradient effects for the kinetics of propagating phase boundaries in solids // SIAM J. Appl. Math. – 1991. – **51**. – P. 1205–1221.
6. *Slemrod M.* Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1983. – **81**. – P. 37–85.
7. *Працах Н. П.* Мішана задача для нелінійного еволюційного рівняння з другою похідною за часом в узагальнених просторах Лебега // Мат. студії. – 2001. – **16**, № 2. – С. 157–168.
8. *Працах Н.* Існування та єдиність розв'язку мішаної задачі для одного параболічного нелінійного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 148–157.
9. *Слепцова И. П., Шишков А. Е.* Принцип Фрагмена–Линделефа для неоднородных квазилинейных эволюционных уравнений высшего порядка // Укр. матем. журн. – 2005. – **57**, № 2. – С. 239–249.
10. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторное дифференциальное уравнение. – Москва: Мир, 1972. – 336 с.
11. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Изд-во иностр. лит-ры, 1958. – 474 с.
12. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 588 с.

Львівський національний університет ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 05.11.2007