



УДК 620.178.3

© 2008

Член-корреспондент НАН України А. Е. Божко, В. Е. Корсун

О числовых и спектральных характеристиках комбинации стохастического и полигармонического вибрационных процессов

The formulas for the moments, cumulants, and spectral densities of a combination of stochastic and polyharmonic processes are given.

Эксплуатационные вибрации на транспорте, судах, самолетах, космических аппаратах и др. представляют, в основном, стохастически-детерминированные механические процессы [1, 2]. Изучение их характеристик необходимо для решения задач по их воспроизведению при стендовых испытаниях объектов, предназначенных для эксплуатации в условиях действия смешанных (стохастически-детерминированных) динамических нагрузок. Смешанные вибрации могут представлять собой аддитивную $y_a(t) = \xi(t) + x(t)$, мультипликативную $y_m(t) = \xi(t)x(t)$ и обобщенную смеси [3] $y_o(t) = x_1(t)\xi(t) + x_2(t)$, где $\xi(t)$ — стохастический процесс; $x_{1,2}(t) = \sum_{k=1}^N A_{1,2k} \sin(\omega_k t + \varphi_k)$ — квазидетерминированный полигармонический процесс (t — время; $A_{1,2k}$ — амплитуда; ω_k — круговая частота; φ_k — сдвиг фаз). Помимо функции и плотности распределения вероятности стохастического процесса в вычислительной практике широко используются числовые и спектральные характеристики закона распределения вероятности — моменты, кумулянты, спектральные плотности, спектральные функции и др. С помощью этих характеристик и операций над ними удается решать вероятностные задачи без использования законов распределения. В данном исследовании считаем, что смешанный вибропроцесс является стационарным и эргодическим.

Для аддитивного процесса моменты определяются соотношениями [4]

$$M_s^y = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r [y(t)]^s dt, \quad s = 1, 2, 3, \dots,$$

для начальных моментов и

$$m_{sц}^y = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r [y(t) - M_1]^s dt, \quad s = 2, 3, 4, \dots, \quad (1)$$

для центральных моментов. Здесь $r = T = 2\pi/\omega_1$ — при кратных частотах $\omega_k = k\omega_1$ и $r \rightarrow \infty$ — при несоизмеримых частотах ω_k . Полагая, что смешанный процесс $y(t)$ является центрированным ($M_1^y = 0$), перепишем (1) в виде

$$m_s^y = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r [\xi(t) + x(t)]^s dt = \langle [\xi(t) + x(t)]^s \rangle, \quad (2)$$

где $\langle \cdot \rangle$ — операция осреднения по времени.

Возводя $y(t)$ в степень S , получим

$$m_s^y = \left\langle \sum_{l=0}^s C_s^l x(t)^{s-l} \xi^l(t) \right\rangle. \quad (3)$$

Выражение для центральных моментов можно также получить с помощью характеристической функции $\Theta_y(v)$. Функция $\Theta_y(v)$ смешанных колебаний определяется на основе Фурье-преобразования плотности вероятности

$$\Theta_y(v) = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(u) e^{iuv} du = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r e^{ivy(t)} dt. \quad (4)$$

Из (4), используя выражение [5]

$$\left. \frac{d^s \Theta_y(v)}{dv^s} \right|_{v=0} = i^s m_s^y,$$

получаем центральные моменты смешанных процессов в виде (2), а затем и (3).

Наряду с моментами статистическими характеристиками являются кумулянты κ_s (семиинварианты) [6], определяемые выражением

$$\kappa_s = i^{-s} \left. \frac{d^s \ln \Theta(v)}{dv^s} \right|_{v=0}.$$

Здесь функция $\Theta(v)$ может быть разложена в ряд Маклорена с использованием моментов m_s

$$\Theta(v) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(iv)^s}{s!} m_s \quad (5)$$

и кумулянтов

$$\Theta(v) = \exp \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(iv)^s}{s!} \kappa_s \right]. \quad (6)$$

Согласно выражениям (5) и (6), между моментами m_s и кумулянтами κ_s существуют взаимозависимости [6]. Рассмотрим определение числовых характеристик процесса $y_a(t) = \xi(t) + x(t)$ в случае, когда $\xi(t)$ — стационарный гауссовский процесс с дисперсией $D_\xi = \sigma_\xi^2$.

Центральные моменты m_s^y процесса y_a вычисляем по формуле (3), преобразованной с учетом свойств операции [7] определения математического ожидания

$$\begin{aligned} m_2^y &= \langle \xi^2(t) \rangle + \langle x^2(t) \rangle + 2(\langle \xi(t) \rangle \langle x(t) \rangle), \\ m_3^y &= \langle \xi^3(t) \rangle + 3\langle \xi^2(t) \rangle \langle x(t) \rangle + 3\langle \xi(t) \rangle \langle x^2(t) \rangle + \langle x^3(t) \rangle, \\ m_4^y &= \langle \xi^4(t) \rangle + 4\langle \xi^3(t) \rangle \langle x(t) \rangle + 6\langle \xi^2(t) \rangle \langle x^2(t) \rangle + 4\langle \xi(t) \rangle \langle x^3(t) \rangle + \langle x^4(t) \rangle, \\ &\dots \\ m_s^y &= \sum_{j=0}^s C_s^j \langle x^{s-j}(t) \rangle \langle \xi^j(t) \rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что нечетные центральные моменты $\langle \xi^{2s+1}(t) \rangle$ стохастической составляющей $\xi(t)$ равны нулю, а четные выражаются через ее дисперсию

$$m_{2s}^\xi = \langle \xi^{2s}(t) \rangle = (2s - 1)!! \sigma_\xi^{2s}. \quad (7)$$

С учетом (7) первые шесть моментов процесса y_a записываются в виде

$$\begin{aligned} M_1^y &= 0, & m_4^y &= m_4^x + 3\sigma_\xi^4 + 6m_2^x \sigma_\xi^2, \\ m_2^y &= m_2^x + m_2^\xi, & m_5^y &= m_5^x + 10m_3^x \sigma_\xi^2, \\ m_3^y &= m_3^x, & m_6^y &= m_6^x + 15\sigma_\xi^6 + 15m_4^x. \end{aligned} \quad (8)$$

При вычислении моментов по формулам (8) необходимо воспользоваться выражениями для центральных моментов m_s^x , приведенных в работах [8, 9].

По вычисленным m_s^y можно определить κ_s^y

$$\begin{aligned} \kappa_1^y &= M_1^y, & \kappa_4^y &= m_4^y - 3(m_2^y)^2, \\ \kappa_2^y &= m_2^y, & \kappa_5^y &= m_5^y - 10m_2^y m_3^y, \\ \kappa_3^y &= m_3^y, & \kappa_6^y &= m_6^y - 15m_2^y m_4^y - 10(m_3^y)^2 + 30(m_2^y)^3. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение (9) соответствуют y_a при $x(t)$ с кратными частотами $\omega_k = k\omega_1$. Для $x(t)$ с несоизмеримыми ω_k и ω_1 можно рекомендовать следующее вычисление кумулянтов κ_s^y . Так как в y_a $\xi(t)$ и $x(t)$ статистически независимы, то [6]

$$\kappa_s^y = \kappa_s^\xi + \sum_{k=1}^N \kappa_{sk}^x. \quad (10)$$

Кроме того, известно [10], что гауссовский процесс $\xi(t)$ обладает только двумя первыми $\kappa_1^\xi = M_1^\xi$, $\kappa_2^\xi = \sigma_\xi^2$ отличными от нуля кумулянтами. Поскольку $\xi(t)$ является центрированным, то (10) запишем в виде

$$\begin{aligned} \kappa_2^y &= \kappa_2^x + \kappa_2^\xi = \sum_{k=1}^N \kappa_{sk}^x + \kappa_2^\xi, \\ \kappa_s^y &= \sum_{k=1}^N \kappa_{sk}^x, & s &= 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Кумулянты отдельных гармоник κ_{sk}^x можно вычислить по формулам (9) через центральные моменты гармоник

$$\begin{aligned}\kappa_{2sk}^x &= \frac{(2s-1)!!}{2^s s!} A_k^{2s}, \\ m_{(2s-1)k}^x &= 0, \quad s = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{12}$$

Подставляя (12) в (9), получим

$$\kappa_{2k}^x = D_k, \quad \kappa_{3k}^x = 0, \quad \kappa_{4k}^x = -\frac{3}{2}D_k^2, \quad \kappa_{5k}^x = 0, \quad \kappa_{6k}^x = 10D_k^3,\tag{13}$$

где $D_k = A_k^2/2$ — дисперсия k -й гармоники.

Кумулянты суммарного $y_a(t)$ в соответствии с (13) имеют вид

$$\kappa_2^y = \sigma_\xi^2 + \sum_{k=1}^N D_k, \quad \kappa_3^y = 0, \quad \kappa_4^y = -\frac{3}{2} \sum_{k=1}^N D_k^2, \quad \kappa_5^y = 0, \quad \kappa_6^y = 10 \sum_{k=1}^N D_k^3.$$

Для $x(t)$ с кратными частотами

$$\kappa_2^y = \kappa_2^x + \kappa_2^\xi, \quad \kappa_3^y = \kappa_3^x, \quad \kappa_4^y = \kappa_4^x, \quad \kappa_5^y = \kappa_5^x, \quad \kappa_6^y = \kappa_6^x.$$

Третий и четвертый кумулянты определяют асимметрию и эксцесс соответственно процесса $y_a(t)$.

Для вычисления моментов мультипликативной смеси $y_M(t)$ воспользуемся выражением

$$M_s^y = \int_{-\infty}^{\infty} u^s P_y(u) du, \quad s = 3, 4, \dots,$$

в которое подставим выражение для плотности распределения этой смеси

$$P_y(v) = \frac{1}{r\sigma_\xi\sqrt{2\pi}} \int_0^r \frac{1}{|x(t)|} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_\xi^2 x^2(t)}\right) dt,$$

выведенное авторами в процессе данного исследования. В результате получим

$$m_s^y = \frac{1}{r\sqrt{2\pi}\sigma_\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} u^s \int_0^r \frac{1}{|x(t)|} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_\xi^2 x^2(t)}\right) dt.\tag{14}$$

Изменяя в (14) очередность интегрирования и интегрируя, находим центральные моменты $y_M(t)$ в виде

$$m_{2s}^y = (2s-1)!! \sigma_\xi^{2s} \frac{1}{r} \int_0^r x^{2s}(t) dt, \quad s = 1, 2, \dots$$

Центральные моменты обобщенного вибропроцесса $y_o(t)$ определяются по правилу сложения моментов (см. (14), (15)). Так центральный четвертый момент $y_o(t)$ равен

$$m_4^y = 3\sigma_\xi^4 m_4^{x_1} + m_4^{x_2} + 6\sigma_\xi^2 m_2^{x_1} m_2^{x_2}.$$

Кумулянты $y_o(t)$ вычисляются в соответствии с правилом сложения кумулянт независимых случайных величин через кумулянты $\kappa_5^{\xi x_1}$ и $\kappa_5^{x_2}$, либо через центральные моменты на основании (9). Далее перейдем к вычислению спектральных характеристик смешанных вибропроцессов.

Так как преобразование Фурье линейно, то спектральная плотность $s_y(\omega)$ процесса $y_a(t)$ равна

$$s_y(\omega) = s_x(\omega) + s_\xi(\omega).$$

Спектральная плотность процесса $x(t)$ равна [11]

$$s_x(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k^2}{2} \delta(\omega - \omega_k).$$

В качестве $\xi(t)$ выберем стационарный, нормальный, ограниченный по частоте белый шум s

$$s_\xi(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} c, \quad \omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max} \\ 0, \quad \omega < \omega_{\min}, \quad \omega > \omega_{\max} \end{array} \right\},$$

где c — амплитуда (интенсивность) белого шума.

Важной спектральной характеристикой является спектральная функция

$$G_y(\omega) = \int s_y(\omega) d\omega,$$

являющаяся первообразной спектральной плотности $s_y(\omega)G_x(\omega)$ процесса $x(t)$ является линейной комбинацией

$$G_x(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k^2}{2} \eta(\omega - \omega_k)$$

единичных функций. Для $y_a(t)$

$$G_y(\omega) = G_x(\omega) + G_\xi(\omega),$$

где

$$G_\xi(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{при } \omega < \omega_{\min}, \\ c\omega \quad \text{при } \omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}, \\ \sigma_\xi^2 \quad \text{при } \omega > \omega_{\max}. \end{array} \right\}$$

При решении вероятностных задач [12] также используются числовые характеристики спектра мощности в виде спектральных моментов

$$\lambda_l = \int_0^\infty s(\omega) \omega^l d\omega. \tag{15}$$

Учитывая, что $s_y(\omega)$ заключена в интервал частот $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, преобразуем (15) к виду

$$\lambda_l = \frac{c}{l+1}(\omega_{\min} - \omega_{\max})^{l+1} + \sum_{k=-1}^N \frac{A_k^2}{2}(\omega_k)^2.$$

Используя известное для линейных систем соотношение [13]

$$S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_y^B(\omega), \quad j = \sqrt{-1},$$

где $H(j\omega)$ — передаточная функция системы; $S_y^B(\omega)$ — спектральная плотность входного воздействия $y_B(t)$; $y(t)$ — реакция системы с $H(j\omega)$, получим

$$\lambda_l^y = c \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \omega^l |H(j\omega)|^2 d\omega + \sum_{k=-1}^N \frac{A_k^2}{2} \omega_k^2 |H(j\omega_k)|^2$$

для спектральных моментов установившихся колебаний системы.

Спектральная плотность мультипликативной смеси $y_M(t)$ записывается в виде суммы N спектральных плотностей

$$S_{y_M}(\omega) = \sum_{k=-1}^N \frac{A_k^2}{4} [S_{\xi}(\omega - \omega_k) + S_{\xi}(\omega + \omega_k)],$$

амплитудно-модулированных белым шумом гармоник [14].

На основе полученных результатов спектральная плотность $s_{y\omega}$ обобщенного процесса $y_o(t)$ определяется как сумма

$$s_{y_o}(\omega) = s_{y_M}(\omega) + s_x(\omega),$$

где $s_{y_M}(\omega)$ — спектральная плотность мультипликативной смеси $y_M(t)$; $s_x(\omega)$ — спектральная плотность полигармонического процесса $x(t)$.

Таким образом, в результате данного исследования выведены формулы числовых и спектральных характеристик смешанного процесса вибраций в виде аддитивной, мультипликативной и обобщенной (аддитивного совместно с мультипликативным) смесей стохастического и полигармонического процессов.

1. *Случайные колебания* / Под ред. С. Крендела. — Москва: Мир, 1967. — 356 с.
2. *Божко А. Е.* Воспроизведение вибраций. — Киев: Наук. думка, 1975. — 190 с.
3. *Гусев А. С., Светлицкий В. А.* Расчет конструкций при случайных воздействиях. — Москва: Машиностроение, 1984. — 240 с.
4. *Коцеев А. А., Дударева В. И.* Математические модели случайных процессов в задачах имитации эксплуатационных вибраций // Пробл. машиностроения. — 1981. — Вып. 13. — С. 29–33.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — Москва: Наука, 1973. — 720 с.
6. *Малахов А. Н.* Кумулятивный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. — Москва: Сов. радио, 1978. — 376 с.
7. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. — Москва: Наука, 1969. — 576 с.
8. *Коловский М. З.* О замене случайных вибрационных воздействий полигармоническим процессом // Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение. — 1963. — № 2. — С. 93–101.
9. *Божко А. Е., Штейнвольф А. Л.* Воспроизведение полигармонических вибраций при стендовых испытаниях. — Киев: Наук. думка, 1984. — 167 с.

10. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. Т. 1. – Москва: Сов. радио, 1963. – 896 с.
11. Левин Б. З. Теоретические основы статистической радиотехники. – Москва: Сов. радио, 1974. – Кн. 1. – 552 с.
12. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. – Москва: Мир, 1969. – 398 с.
13. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. – Москва: Наука, 1979. – 335 с.
14. Харкевич А. А. Спектры и анализ. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 236 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 29.05.2007

УДК 539.3

© 2008

Г. Д. Гавриленко, В. И. Мацнер

Влияние осесимметричных несовершенств на частоты колебаний нагруженных ребристых оболочек

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины И. С. Чернышенко)

A new approach to the problem of cylindrical shell vibrations is used for the estimation of oscillation frequencies of shells with initial local axisymmetric deflection. The analytic solutions and the results of calculation are presented.

1. Методика аналитического расчета частот колебаний и критических нагрузок подкрепленных цилиндрических оболочек с осесимметричными вмятинами и выпучинами. Рассматриваются нагруженные осевыми сжимающими силами цилиндрические оболочки, подкрепленные ребрами жесткости в двух направлениях и имеющие осесимметричные начальные прогибы в виде вмятин и выпучин (рис. 1). Части оболочки $\ell_{n+1} - \ell_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots, N$, где N — число вмятин) вследствие наличия начальных прогибов будут искривлены вдоль образующей по радиусам ρ_n и рассматриваются как оболочки, близкие по форме к цилиндрическим с радиусами кривизны r, ρ_n . Предполагается, что радиус r

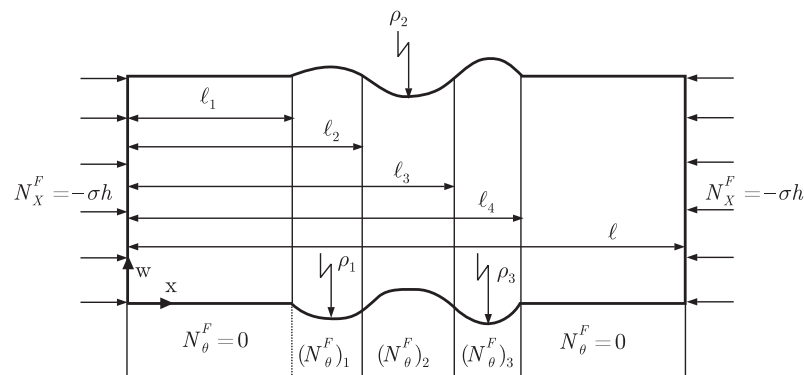


Рис. 1. Схема нагруженной оболочки