

10. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. Т. 1. – Москва: Сов. радио, 1963. – 896 с.
11. Левин Б. З. Теоретические основы статистической радиотехники. – Москва: Сов. радио, 1974. – Кн. 1. – 552 с.
12. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. – Москва: Мир, 1969. – 398 с.
13. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. – Москва: Наука, 1979. – 335 с.
14. Харкевич А. А. Спектры и анализ. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 236 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 29.05.2007

УДК 539.3

© 2008

Г. Д. Гавриленко, В. И. Мацнер

Влияние осесимметричных несовершенств на частоты колебаний нагруженных ребристых оболочек

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины И. С. Чернышенко)

A new approach to the problem of cylindrical shell vibrations is used for the estimation of oscillation frequencies of shells with initial local axisymmetric deflection. The analytic solutions and the results of calculation are presented.

1. Методика аналитического расчета частот колебаний и критических нагрузок подкрепленных цилиндрических оболочек с осесимметричными вмятинами и выпучинами. Рассматриваются нагруженные осевыми сжимающими силами цилиндрические оболочки, подкрепленные ребрами жесткости в двух направлениях и имеющие осесимметричные начальные прогибы в виде вмятин и выпучин (рис. 1). Части оболочки $\ell_{n+1} - \ell_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots, N$, где N — число вмятин) вследствие наличия начальных прогибов будут искривлены вдоль образующей по радиусам ρ_n и рассматриваются как оболочки, близкие по форме к цилиндрическим с радиусами кривизны r, ρ_n . Предполагается, что радиус r

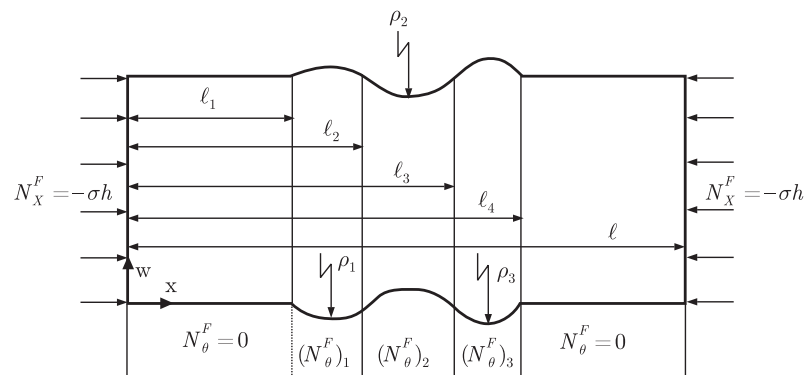


Рис. 1. Схема нагруженной оболочки

имеет столь малое изменение, что можно считать его постоянным по всей длине оболочки. При расчете оболочку с начальными прогибами будем рассматривать как систему, состоящую из двух цилиндрических подкрепленных оболочек длиной ℓ_1 и $\ell - \ell_{n+1}$ и n оболочек, близких по форме к цилиндрическим длиной $\ell_{n+1} - \ell_n$. Предполагается, что оболочка подвержена равномерному продольному сжатию и в ней в безмоментном основном состоянии возникают следующие усилия: продольное N_x^F , окружные $(N_\theta^F)_n$

$$\{N_x^F, (N_\theta^F)_n\} = -\sigma h \alpha_1 \begin{cases} 1, & 0 \quad \text{при } x \in [0, \ell_1] \cap \tilde{\delta} \in [\ell_n, \ell], \\ 1, & -r_n \quad \text{при } x \in [\ell_n, \ell_{n+1}], \end{cases} \quad (1)$$

где σ — докритическое сжимающее нормальное напряжение, $\alpha_1 = 1 + F_s/h\ell_s$; h — толщина оболочки; F_s — площадь поперечного сечения стрингера; ℓ_s — расстояние между стрингерами ($\ell_s = 2\pi r/n_s$); k_s — число стрингеров; $r_n = r/\rho_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots, N$).

Методика работ [1–3] обобщается на задачи динамики. Уравнения движения подкрепленной оболочки получим из принципа стационарности действия Остроградского–Гамильтона [6].

Расчетные формулы получены энергетическим методом. Полную потенциальную энергию рассматриваемой системы (V) запишем как сумму потенциальных энергий V_2 и A_2

$$V = V_{2o} + V_{2s} + V_{2r} + A_2 = V_2 + A_2. \quad (2)$$

Здесь V_{2o} — потенциальная энергия обшивки; V_{2s} — потенциальная энергия стрингеров; V_{2r} — потенциальная энергия шпангоутов; A_2 — работа внешних сил.

Выражение для V представлено в работе [4, формулы (6.18), (6.19)]. Кинетическая энергия такой оболочки имеет вид

$$T = \frac{\rho_o h}{2} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] r dx d\theta + \\ + \frac{\rho_s F_s}{\ell_s} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u_s}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial t} \right)^2 \right] r dx d\theta + \frac{\rho_r F_r}{\ell_r} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_r}{\partial t} \right)^2 \right] r dx d\theta. \quad (3)$$

Здесь приняты следующие обозначения: ℓ, r, h — длина, радиус, толщина оболочки; $F_s, I_{\theta s}, I_{kps}, z_s$ — площадь поперечного сечения стрингера, его момент инерции, момент инерции при кручении и эксцентриситет s -го стрингера (расстояние от оси стрингера до срединной поверхности обшивки); $F_r, I_{xr}, I_{kpr}, z_r, k_r, \ell_r$ — аналогичные величины для шпангоутов, $\ell_r = \ell/(k_r + 1)$, $K = Eh/(1 - \mu^2)$, $D = Kh^2/12$; E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона материала обшивки; E_s, G_s, E_r, G_r — модуль упругости и модуль сдвига соответственно стрингеров и шпангоутов, ρ_o, ρ_s, ρ_r — плотность материала обшивки, стрингеров и шпангоутов; $\alpha_x = 1 + \alpha_s$, $\alpha_s = E_s F_s / K \ell_s$, $\alpha_{1s} = F_s / h \ell_s$, $\alpha_\theta = 1 + \alpha_r$, $\alpha_r = E_r F_r / K \ell_r$, $\beta_s = E_s I_s / D \ell_s$, $\beta_x = 1 + \beta_s$, $\beta_r = E_r I_r / D \ell_r$, $\beta_\theta = 1 + \beta_r$, $\beta_{x\theta} = \beta_{x\theta s} + \beta_{x\theta r}$, $\beta_{x\theta s} = G_s I_{kps} / D \ell_s$, $\beta_{x\theta r} = G_r I_{kpr} / D \ell_r$.

Выражения для компонент перемещений, удовлетворяющих условиям шарнирного опирания, выбираем в виде

$$\begin{aligned} u &= (u_{1ij} \cos i_1\theta + u_{2ij} \sin i_2\theta) \cos \frac{\lambda x}{r} \cos \omega t, \\ v &= (v_{1ij} \sin i_1\theta + v_{2ij} \cos i_2\theta) \sin \frac{\lambda x}{r} \cos \omega t, \\ w &= (w_{1ij} \cos i_1\theta + w_{2ij} \cos i_2\theta) \sin \frac{\lambda x}{r} \cos \omega t, \end{aligned} \quad (4)$$

где u_{1ij} , v_{1ij} , w_{1ij} , u_{2ij} , v_{2ij} , w_{2ij} — произвольные постоянные, $\lambda = j\pi r/\ell$; j — число полу-волн по длине; i_1 и i_2 — числа окружных волн; ω — собственная частота; t — временная координата. Функции u_{1ij} , v_{1ij} , w_{1ij} описывают изгиб ребер, а u_{2ij} , v_{2ij} , w_{2ij} — их кручение, причем используются они раздельно, а не вместе. В последующих формулах индексы 1 и 2 опущены.

После подстановки (4) в выражения для V и T получаем

$$\begin{aligned} V &= \frac{K\pi\ell}{4r} \left\{ (u_{ij}\lambda - iv_{ij} + w_{ij})^2 + 2(1-\mu)u_{ij}(iv_{ij} - w_{ij}) + \frac{1-\mu}{2}(-u_{ij}i + v_{ij}\lambda)^2 + \right. \\ &+ \alpha_s(\lambda u_{ij} - z_{sr}\lambda^2 w_{ij})^2 + \alpha_r[v_{ij}(1 - z_{rr}) - w_{ij}(1 - i^2 z_{rr})]^2 + \\ &+ \left\{ \frac{1}{a}[(\lambda^2 + i^2)w_{ij} - iv_{ij}]^2 + 2(1-\mu)[\lambda^2 w_{ij}(iv_{ij} - i^2 w_{ij}) - (iv_{ij} - i^2 w_{ij})^2] + \right. \\ &\quad \left. + \beta_s \lambda^4 w_{ij}^2 + \beta_{x\theta s} i^2 \lambda^2 + \beta_{x\theta r} (i\lambda w_{ij} + iu_{ij})^2 \right\} + \\ &+ S_{12}w_{ij}^2 + 2S_{11}\lambda u_{ij}w_{ij} - 2\mu S_{11}w_{ij}(iv_{ij} - w_{ij}) + \alpha_s S_{12}(w_{ij} - z_{sr}\lambda u_{ij})^2 + \\ &+ 2\alpha_s S_{11}(w_{ij} - z_{sr}\lambda u_{ij})(\lambda u_{ij} - z_{sr}\lambda^2 w_{ij}) + \frac{1}{a}[S_{12}\lambda^2 u_{ij}^2 + 2S_{11}\lambda^3 u_{ij}w_{ij} + \\ &+ 2\mu S_{11}\lambda u_{ij}(i^2 w_{ij} - iv_{ij}) + 2(1-\mu)[S_{21}iu_{ij}(2i\lambda w_{ij} - 2\lambda v_{ij}) + S_{22}u_{ij}^2] + \\ &+ \beta_s \lambda u_{ij}(\lambda u_{ij} S_{12} + \lambda^2 S_{11} w_{ij}) + \beta_{x\theta s} \lambda v_{ij}(S_{12} \lambda v_{ij} - 2S_{21} i \lambda w_{ij}) \left. \right\} - \\ &- \frac{K\pi\ell\sigma}{4rE}(1-\mu^2)\alpha_1(\lambda^2 - i^2 S_{11})w_{ij}^2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$T = \frac{\rho_o h \omega^2 \pi \ell}{4r} (\alpha_{11} u^2 + \alpha_{22} v^2 + \alpha_{33} w^2), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 1 + \frac{\rho_s F_s}{\rho_o h \ell_s}, & \alpha_{22} &= 1 + \frac{\rho_r F_r}{\rho_o h \ell_r}, & \alpha_{33} &= 1 + \frac{\rho_s F_s}{\rho_o h \ell_s} + \frac{\rho_r F_r}{\rho_o h \ell_r}, \\ S_{11} &= \sum_{n=1}^N r_n I_{1n}, & S_{12} &= \sum_{n=1}^N r_n^2 I_{1n}, & S_{21} &= \sum_{n=1}^N r_n I_{2n}, & S_{22} &= \sum_{n=1}^N r_n^2 I_{2n} \\ I_{1n} &= \frac{2}{\ell} \int_{\ell_n}^{\ell_{n+1}} \sin^2 \frac{\lambda x}{r} dx, & I_{2n} &= \frac{2}{\ell} \int_{\ell_n}^{\ell_{n+1}} \cos^2 \frac{\lambda x}{r} dx, & a &= \frac{12r^2}{h^2}. \end{aligned}$$

Условия экстремума полной энергии системы ($V+T$) приводят к системе алгебраических уравнений для определения частот колебаний, из которого находим

$$(\bar{\omega}_{ij}^2)_{cr} = \frac{\bar{A}_{33}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) + 2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2}{\alpha_{11}(A_{22}\bar{A}_{33} - A_{22}^2) + \alpha_{11}(A_{11}\bar{A}_{33} - A_{13}^2) + \alpha_{33}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_{33} &= A_{33} - \frac{A_{33}''\sigma}{E}, \\ A_{11} &= \alpha_x \lambda^2 + \frac{1-\mu}{2} i^2 + \alpha_s z_{rs} \lambda^2 (z_{sr} S_{12} - 2S_{11}) + \frac{1}{a} [\beta_x \lambda^2 S_{12} + 2(1-\mu) i^2 S_{22}]; \\ A_{12} &= -i \lambda \frac{1+\mu}{2} - \frac{i \lambda}{a} [\mu S_{11} + 2(1-\mu) S_{21}]; \\ A_{13} &= \lambda [\mu + \alpha_x S_{11} - \alpha_s z_{sr} (\lambda^2 + S_{12} - z_{sr} \lambda^2 S_{11})] + \frac{\lambda}{a} [(\lambda^2 \beta_x + \mu i^2) S_{11} + 2(1-\mu) i^2 S_{21}]; \\ A_{22} &= \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 + c_\theta i^2 + \frac{1}{a} [i^2 \beta_\theta + 2(1-\mu) \lambda^2]; \\ A_{23} &= -i(1 + \mu S_{11}) - \frac{i}{a} (\beta_\theta i^2 + (2-\mu) \lambda^2) - i \alpha_r (1 - z_{rr}) (1 - i^2 z_{rr}); \\ A_{33} &= 1 + \alpha_x S_{12} + 2\mu S_{11} + \alpha_s z_{sr} \lambda^2 (z_{sr} \lambda^2 - 2S_{11}) + \alpha_r (1 - i^2 z_{rr})^2 + \\ &\quad + \frac{1}{a} (\beta_x \lambda^4 + \beta_\theta i^4 + 2\lambda^2 i^2 (1 + \beta_x \theta)); \quad \bar{\omega}^2 = \frac{\rho_o h r^2}{K} \omega^2, \\ A_{33}'' &= (1 - \mu^2) \alpha_1 (\lambda^2 - i^2 S_{11}); \quad z_{sr} = \frac{z_s}{r}, \quad z_{rr} = \frac{z_r}{r}, \quad c_\theta = 1 + \alpha_r (1 - z_{rr})^2. \quad (8) \end{aligned}$$

При этом возможен ряд форм колебаний (случаев деформации), для которых собственные частоты зависят только от части параметров жесткости ребер.

Рассмотрены следующие случаи.

Общий (все стрингеры и шпангоуты работают на растяжение — сжатие, изгиб и кручение); восемь частных, каждый из которых имеет свой подслучай:

первый (стрингеры работают на растяжение — сжатие и изгибаются, шпангоуты работают аналогично общему случаю); 1-й подслучай отличается от первого случая тем, что не учитывается жесткость стрингеров и шпангоутов на растяжение — сжатие;

второй (стрингеры только закручиваются, шпангоуты учтены аналогично общему), 2-й подслучай отличается от второго случая тем, что не учтена жесткость шпангоутов на растяжение — сжатие;

третий (стрингеры работают как в общем случае, а в шпангоутах не учтена жесткость на кручение), 3-й подслучай отличается от третьего случая тем, что дополнительно не учтена жесткость стрингеров и шпангоутов на растяжение — сжатие;

четвертый (стрингеры работают как в общем случае, шпангоуты работают только на кручение), 4-й подслучай аналогичен четвертому случаю, но не учтена жесткость стрингеров на растяжение — сжатие;

пятый (стрингеры работают на растяжение сжатие и изгиб, шпангоуты только на кручение), 5-й подслучай аналогичен пятому случаю, но не учтена жесткость стрингеров на растяжение — сжатие;

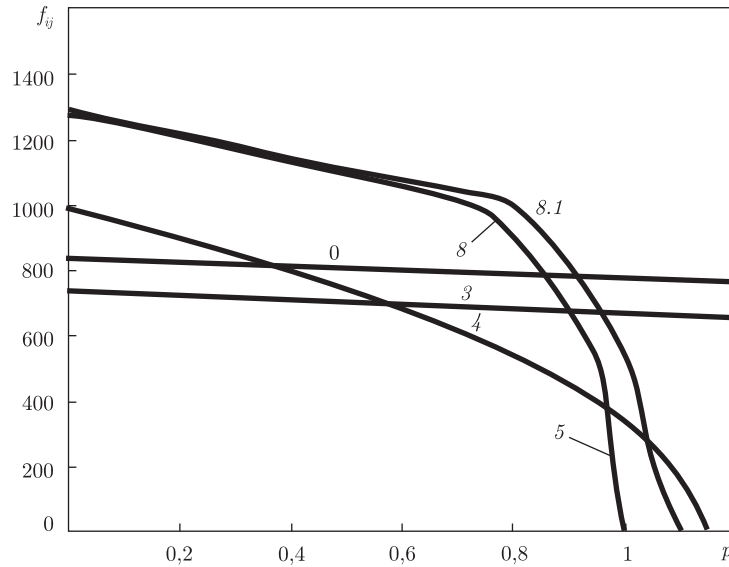


Рис. 2. Зависимость частоты колебаний f_{ij} от параметра нагрузки p (для различных типов деформаций)

шестой (стрингеры только закручиваются, шпангоуты работают на растяжение — сжатие и изгиб), 6-й подслучай аналогичен шестому случаю, но не учтена жесткость шпангоутов на растяжение — сжатие;

седьмой (стрингеры и шпангоуты работают на растяжение — сжатие и изгиб), 7-й подслучай аналогичен седьмому случаю, но не учтена жесткость на растяжение — сжатие как стрингеров, так и шпангоутов;

восьмой (стрингеры и шпангоуты только закручиваются), а в 8-м подслучае учитываются только ограничения на вид деформации.

Далее эти случаи будут обозначены следующим образом: 0(111–111); 1(110–111); 2(001–111); 3(111–110); 4(111–001); 5(110–001); 6(001–110); 7(110–110); 8(001–001). Аналогично обозначим в дальнейшем и подслучаи. Для каждого случая потери устойчивости применяется специальные условия, которые накладываются на число волн и полуволн, связанных с числом ребер. Эти условия следующие для каждого случая (для подслучаев они те же, что и для соответствующего случая): общий ($2i \neq k[n_s], j \neq k_1[n_r + 1]$); первый ($2i = k[n_s], j \neq k_1[n_r + 1]$); второй ($2i = k[n_s], j \neq k_1[n_r + 1]$); третий ($2i \neq k[n_s], j = k_1[n_r + 1]$); четвертый ($2i \neq k[n_s], j = k_1[n_r + 1]$); пятый ($2i = k[n_s], j = k_1[n_r + 1]$); шестой ($2i = k[n_s], j \neq k_1[n_r + 1]$); седьмой ($2i = k[n_s], j \neq k_1[n_r + 1]$); восьмой ($2i = k[n_s], j = k_1[n_r + 1]$), где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, k_1 = 1, 2, 3$.

2. Теоретические частоты колебаний для нагруженных оболочек для различных видов деформаций. На рис. 2 представлена зависимость частоты колебаний $f_{ij} = \omega/\pi$ для идеальной оболочки от параметра нагрузки p . Проанализированы различные виды деформаций, соответствующие рассмотренным 17 случаям, и представлены самые характерные из них. Данные о размерах оболочки и ребер взяты из работы [5]. Оболочка имела такие геометрические параметры: $r/h = 318, \ell/r = 2,08$. Оболочка была усилена двумя шпангоутами и 32 стрингерами. Шпангоуты — уголки $8 \times 6 \times 0,5$ мм, стрингеры — уголки $4 \times 4 \times 0,5$ мм. Стрингеры и шпангоуты крепились полкой 4 мм к внутренней поверхности обшивки.

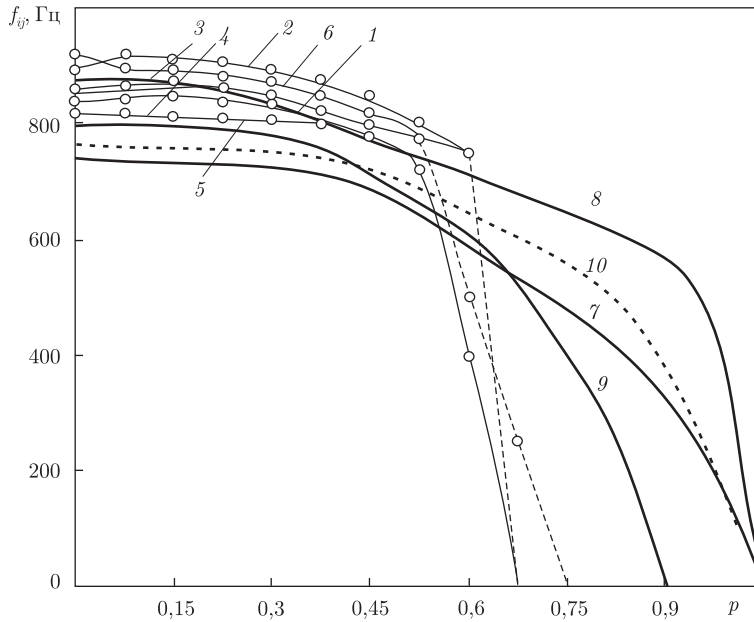


Рис. 3. Сравнение теоретических и экспериментальных данных для минимальных частот

Минимальным частотам соответствует кривая, образованная кривыми 3, 4, и 5. Другие частоты размещены существенно выше.

На рис. 3 выполнено сравнение полученных результатов с результатами работы [5]. Также приведены теоретические кривые для частот при наличии в оболочках двух типов несовершенств: кривые 8 — оболочка с двумя вмятинами и одной выпучиной ($w_1/h = w_3/h = -0,5$; $w_2/h = 0,5$) и 9 — оболочка с одной вмятиной и двумя выпучинами ($w_1/h = w_3/h = 0,5$; $w_2/h = -0,5$), где w_n/h ($n = 1, 2, 3$) — амплитуды прогибов; ширина вмятин и выпучин $dl_n = (\ell_{n+1} - \ell_n)/\ell = 0,17$. Экспериментальные данные представлены для шести оболочек (кривые 1-6).

Теоретические результаты для идеальных оболочек, полученные здесь (кривая 7), близки к теоретическим результатам [5] — кривая 10. Частоты свободных колебаний оболочек с неправильностями (кривые 8 и 9) возрастают при росте p . В диапазоне $0 \leq p \leq 0,6$ они попадают в область экспериментальных данных и отличаются от них (o-o) максимально на 10%. Далее экспериментальные значения резко снижаются при $0,5 \leq p \leq 0,75$ и сильно отличаются от поведения теоретических кривых 7, 8, 10, приближаясь к кривой 9. Приблизить теоретические значения еще больше к экспериментальным данным в этом диапазоне можно лишь, если учесть нелинейное неоднородное состояние и наличие прогибов.

На рис. 4 построены теоретические и экспериментальные зависимости f_{ij} от p для идеальной оболочки (кривые 1, 2) и для оболочки с неправильностями. Данные для расчета взяты из работы [7]. Рассмотрена струнгерная оболочка ($k_s = 32$) при $r/h = 245$, $\ell/r = 2,45$. Струнгеры — уголки $3 \times 4 \times 0,5$ мм. Кривая 1 для идеальной оболочки получена при $j = 1$, $i = 3$, кривая 2 — при $j = 3$, $i = 8$. Кривая 3 (o-o) — это экспериментальные результаты работы [7]. Сближение результатов происходит при сравнении кривых 2 и 3 в диапазоне $0,25 \leq p \leq 0,85$. Кривая 4(1) — для оболочки с двумя выпучинами и одной вмятиной ($w_1/h = w_3/h = 0,5$; $w_2/h = -0,5$; $dl_n = (\ell_{n+1} - \ell_n)/\ell = 0,17$) при $j = 1$, $i = 3$; кривая 4(2) — для оболочки с двумя вмятинами и одной выпучиной ($w_1/h = w_3/h = -0,5$; $w_2/h = 0,5$) при

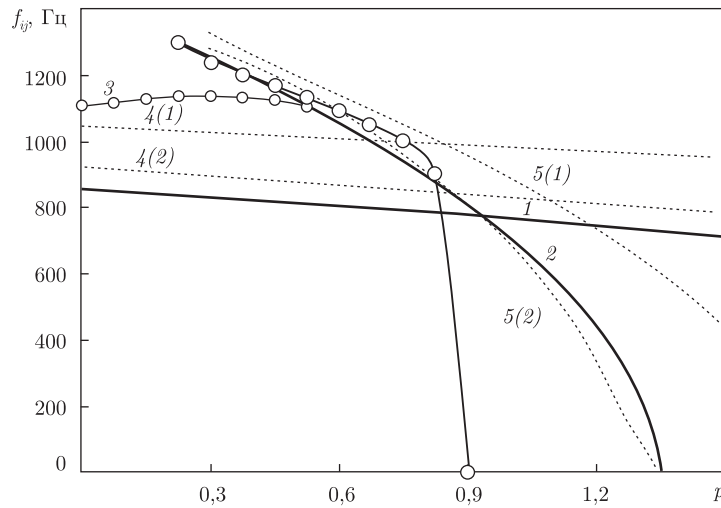


Рис. 4. Теоретические и экспериментальные зависимости f_{ij} от p

$j = 1, i = 3$. Кривые $5(1)$ и $5(2)$ соответствуют оболочкам с прогибами, аналогичными $4(1)$ и $4(2)$, но при $j = 3, i = 8$. Как видно из рис. 4, учет начальных несовершенств приводит к сближению теоретических и экспериментальных значений частот колебаний. Это видно из сравнения кривых 3 и $4(1)$, а также сближения кривых $5(2)$ и 3 . Однако в диапазоне больших p ($p \geq 0,9$) уточнения возможны только на основе нелинейной теории и учета несовершенств.

В заключение отметим, что в настоящей работе предложен аналитический метод определения частот колебаний нагруженных ребристых оболочек с определенным числом осесимметричных несовершенств формы. Проведено сравнение минимальных частот с известными теоретическими и опытными данными.

Показано, в каких диапазонах параметра нагружения p результаты близки к известным результатам и как влияет наличие рассмотренных несовершенств на частоты колебаний.

1. Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И. Устойчивость и несущая способность подкрепленных оболочек с осесимметричными вмятинами // Theoretical Foundations of Civil Engineering. – Polish – Ukrainian Transactions, Warsaw – Dnepropetrovsk. – June 2004. – Vol. II. – P. 629–636.
2. Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И., Ситник А. С. Устойчивость и несущая способность подкрепленных оболочек с осесимметричными вмятинами и выпучинами // Ibid. – Polish – Ukrainian Transactions, Warsaw – Dnepropetrovsk. – June 2005. – **13**. – P. 99–106.
3. Кукаркина А. И., Мацнер В. И., Сивак Э. Ф. О влиянии начальных погрешностей на собственные колебания ребристых цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 1982. – **18**, № 4. – С. 58–63.
4. Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И. Аналитический метод определения верхних и нижних критических нагрузок для упругих подкрепленных оболочек. – Днепропетровск: Барвикс, 2007. – 185 с.
5. Галака П. И., Заруцкий В. А., Капля Н. Г. и др. Исследование влияния сжимающих сил на частоты и формы колебаний ребристых цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 1975. – **11**, № 8. – С. 41–48.
6. Кільчевський М. О. Курс теоретичної механіки. – Київ: Рад. шк., 1957. – Т. 2. – 462 с.
7. Пальчевский А. С., Прядко А. А., Капля П. Г. и др. Колебания продольно сжатых цилиндрических и слабоконических оболочек // Прикл. механика. – 1975. – **11**, № 8. – С. 41–48.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 23.01.2008