

Т. А. Марченко

Прямий центральний співудар пружних циліндричних тіл: надзвуковий етап

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

An approach to the definition of characteristics of a direct central shock of two different elastic cylindrical bodies has been developed. It is supposed that bodies are made from different materials and have different masses and forms of the frontal surfaces. The contact area size changes while impacting and is directly determined during the solution. Shock is considered on a small time interval, during which the perturbation has no time to come to the free frontal surfaces of bodies (supersonic stage). The solution of the problem leads to the determination of key features of the shock interaction and their dependence on the shape of the frontal surfaces of bodies, their mass, and material characteristics.

Наведено методичку дослідження процесу прямого центрального співудару двох пружних циліндричних тіл. Розвинуто підхід, що застосовувався раніше при розв'язанні задач проникання тіл в рідину [1, 2], удару тіл по поверхні пружного півпростору [3, 4] та співудару однакових пружних тіл [5, 6]. Відзначимо, що в даній роботі розглядаються тіла з різними фізико-механічними властивостями (різною масою, формою лобової поверхні, виготовлені з різних матеріалів). Вважається, що тертя між контактуючими поверхнями відсутнє. В початковий момент удару тіла взаємодіють вздовж спільної твірної. Картина деформування в кожному поперечному перетині циліндрів однакова, це дозволяє вивчати процес в одному з них, тобто в рамках плоскої задачі теорії пружності. Границя області контакту змінюється з часом, її координати визначаються безпосередньо в процесі розв'язання задачі. Передбачається, що кривина лобової поверхні тіл і глибина їх взаємного проникання малі порівняно з характерним розміром області контакту, внаслідок чого граничні умови формулюються на недеформованій поверхні тіл.

Процес розглядається на обмеженому проміжку часу, протягом якого границя області контакту змінюється зі швидкістю, яка перевищує швидкість поширення хвиль в матеріалі тіл, так званий надзвуковий етап. При цьому збурення не виходять на вільну фронтальну поверхню тіл і граничними умовами на цій поверхні можна розпорядитися на свій розсуд. Наводяться конкретні числові результати, аналізується залежність характеристик напружено-деформованого стану від їх фізико-механічних властивостей. Сформульовано постановку задачі прямого центрального співудару тіл, отримано розв'язуючу послідовність рівнянь для визначення основних характеристик процесу, наводяться конкретні числові результати обчислень та зроблено висновки.

1. Постановка задачі. Два пружних тіла, обмежених циліндричними поверхнями, рухаються назустріч один одному. В певний момент часу, який приймемо за $t = 0$, починається їх взаємодія. Передбачається, що осі тіл паралельні і в початковий момент удару тіла взаємодіють вздовж спільної твірної. Поперечні перерізи циліндрів у фронтальних відносно напрямку руху частинах обмежені гладкими симетричними кривими. Вектор відносної швидкості наближення центрів мас тіл напрямлений вздовж спільної осі симетрії поперечного перерізу циліндрів і в початковий момент контакту його величина відома

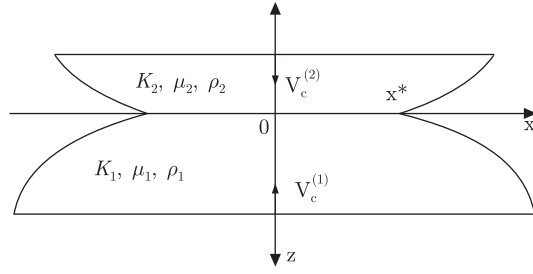


Рис. 1

($V_c(0) = V_c^{(2)}(0) - V_c^{(1)}(0)$, де $V_c^{(i)}(t)$ — швидкість руху центра маси i -го тіла). Тут і надалі верхній індекс (i) набуває значень 1 та 2 для першого та другого тіла відповідно. Оскільки процес деформування однаковий у всіх поперечних перерізах, обмежимося формулюванням плоскої задачі теорії пружності. Вводиться декартова система координат xzO таким чином, що ось Oz спрямована вздовж спільної осі симетрії поперечного перерізу циліндрів (рис. 1). Ширина області контакту $x^*(t)$ змінюється з часом і визначається безпосередньо в процесі розв'язання задачі. Пружні характеристики матеріалу тіл задаються за допомогою модуля всебічного стиску $K^{(i)}$ та модуля зсуву $\mu^{(i)}$.

Для загальності формулювання задачі вводяться безрозмірні позначення:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{R^{(1)}}; & \bar{z} &= \frac{z}{R^{(1)}}; & \bar{u}_j^{(i)} &= \frac{u_j^{(i)}}{R^{(1)}}; & \bar{t} &= \frac{c_0^{(1)} t}{R^{(1)}}; & \bar{\sigma}_{jk}^{(i)} &= \frac{\sigma_{jk}^{(i)}}{\mu^{(1)}}; \\ \bar{F}^{(i)} &= \frac{F^{(i)}}{\mu^{(1)} R^{(1)2}}; & \bar{M}^{(i)} &= \frac{M^{(i)} c_0^{(1)2}}{\mu^{(1)} R^{(1)3}}; & \bar{\varphi}^{(i)} &= \frac{\varphi^{(i)}}{R^{(1)2}}; \\ \alpha^{(i)} &= \frac{c_p^{(i)}}{c_0^{(1)}}; & \beta^{(i)} &= \frac{c_s^{(i)}}{c_0^{(1)}}; & c_0^{(i)} &= \sqrt{\frac{K^{(i)}}{\rho^{(i)}}}; & i &= 1, 2; & j &= r, z, \end{aligned}$$

де $R^{(1)}$ — характерний лінійний розмір 1-го тіла; $u_j^{(i)}$ — компоненти вектора переміщення; $\sigma_{jk}^{(i)}$ — компоненти тензора напруження; $M^{(i)}$ — маса тіла; $\rho^{(i)}$ — щільність матеріалу, з якого виготовлене тіло; $c_0^{(i)}$ — швидкість поширення звукових хвиль в матеріалі, якщо його модуль зсуву дорівнює нулю, $c_p^{(i)}$; $c_s^{(i)}$ — швидкості поширення хвиль стиску та зсуву відповідно, які визначаються рівностями

$$c_p^{(i)} = \sqrt{\frac{K^{(i)} + \frac{4}{3}\mu^{(i)}}{\rho^{(i)}}}; \quad c_s^{(i)} = \sqrt{\frac{\mu^{(i)}}{\rho^{(i)}}}.$$

Нижче риска над позначеннями опускається.

Пружні тіла знаходяться у плоскому напружено-деформованому стані. Хвильове деформування матеріалу описується за допомогою скалярних хвильових потенціалів $\varphi^{(i)}$ та $\psi^{(i)}$, які задовольняють рівняння

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha^{(i)2}} \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^{(i)2}} \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Сформулюємо відповідні граничні та початкові умови. Враховуючи, що кривина лобової поверхні та глибина взаємного проникання тіл малі порівняно з шириною області контакту, граничні умови можуть бути сформульовані на незбурених поверхнях тіл, при цьому поверхні тіл вважаються плоскими. Тоді, за умови відсутності тертя між контактуючими поверхнями, граничні умови полягатимуть у рівності нормальних швидкостей деформування поверхонь та нормальних напружень (рівності нулю поза зоною контакту), і відсутності дотичного напруження, а саме:

$$V_c^{(1)} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial t} \Big|_{z=0} = V_c^{(2)} + \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial t} \Big|_{z=0}; \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)}|_{z=0} = \sigma_{zz}^{(2)}|_{z=0}; \quad \sigma_{zx}^{(i)}|_{z=0} = 0.$$

Відзначимо, що $V_c = H(x^* - |x|)V_c(t)$; $V_c(t) = V_c^{(2)}(t) - V_c^{(1)}(t)$, де $H(x)$ — одинична функція Хевісайда.

Початкові умови для хвильових потенціалів нульові:

$$\varphi^{(i)} = \psi^{(i)} = \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial t} = \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial t} = 0 \quad (t = 0). \quad (3)$$

Рух тіл описується рівняннями руху їх центрів мас:

$$M^{(i)} \frac{dV_c^{(i)}}{dt} = F^{(i)}(t), \quad (4)$$

де $F^{(i)}(t)$ — сила ударної взаємодії, яка обчислюється за формулою

$$F^{(i)}(t) = 2 \int_0^{x^*} \sigma_{zz}^{(i)}(t, x, 0) dx, \quad (5)$$

$x^*(t)$ — точка зміни граничних умов, що визначається як абсциса точки перетину недеформованих контурів взаємодіючих тіл при глибині взаємного проникання $z^*(t)$.

Зауважимо, що процес співудару розглядається на початковому етапі, протягом якого границя області контакту рухається зі швидкістю, яка перевищує швидкість поширення хвиль в матеріалі тіл. Це дозволяє в якості об'єктів, моделюючих тіла, розглядати пружні півсмуги певної ширини l , на тильних поверхнях яких реалізуються умови (2). Внаслідок вибору інтервалу часу, граничні умови на бічних гранях півсмуг (при $|x| = l$) можуть бути вибрані з міркувань зручності розв'язання. Зокрема, для зручності розділення змінних в загальному розв'язку диференціальних рівнянь (1), вважатимемо, що на бічних гранях мають місце такі умови:

$$u_z^{(i)}|_{|x|=l} = 0; \quad \sigma_{zx}^{(i)}|_{|x|=l} = 0. \quad (6)$$

На нескінченності збурення відсутні:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} \rightarrow 0, \quad \psi^{(1)} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty; \\ \varphi^{(2)} \rightarrow 0, \quad \psi^{(2)} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Співвідношення (1)–(7) складають незмішану початково-крайову задачу з невідомою рухомою границею.

2. Метод розв'язання крайової задачі. Нехай на фронтальній поверхні кожного тіла відома швидкість її деформування, яку можна зобразити рядом Фур'є на відрізку $-l \leq x \leq l$:

$$V^{(i)}(t, x, 0) = \left. \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial t} \right|_{z=0}; \quad V^{(i)}(t, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(i)}(t) \cos(\bar{n}x); \quad \bar{n} = \frac{\pi n}{l}. \quad (8)$$

Дотичне напруження задане і дорівнює нулю на всій фронтальній поверхні:

$$\sigma_{zx}^{(i)}(t, x, 0) = 0; \quad \sigma_{zx}^{(i)}(t, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{zxn}^{(i)}(t) \sin(\bar{n}x). \quad (9)$$

Нижче риска над n буде опускатися.

Знайдемо розв'язок системи диференціальних рівнянь (1), використовуючи при цьому умови (8) та (9). Застосуємо до системи (1) інтегральне перетворення Лапласа по t з параметром s . З урахуванням початкових умов отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{(i)L}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(i)L}}{\partial z^2} &= \frac{s^2}{\alpha^{(i)2}} \varphi^{(i)L}; \\ \frac{\partial^2 \psi^{(i)L}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(i)L}}{\partial z^2} &= \frac{s^2}{\beta^{(i)2}} \psi^{(i)L}. \end{aligned} \quad (10)$$

Індекс L позначає функцію в просторі зображень за Лапласом, отже

$$f^L(s) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt; \quad f(t) = \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{zt} f^L(s) ds; \quad f^L(s) \leftrightarrow f(t).$$

Застосовуючи до системи (10) метод розділення змінних, використовуючи граничні умови на бічних поверхнях півсмуг (6), а також умови (7) відсутності збурень в нескінченно віддалених точках, отримуємо загальний розв'язок системи (10):

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)L} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)}(s) e^{-zP_1} \cos nx, & \psi^{(1)L} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)}(s) e^{-zS_1} \sin(nx); \\ \varphi^{(2)L} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)}(s) e^{zP_2} \cos(nx), & \psi^{(2)L} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)}(s) e^{zS_2} \sin(nx); \end{aligned} \quad (11)$$

$$P_i = \sqrt{\frac{s^2}{\alpha^{(i)2}} + n^2}, \quad S_i = \sqrt{\frac{s^2}{\beta^{(i)2}} + n^2}, \quad i = 1, 2,$$

де $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$ — коефіцієнти, які підлягають визначенню з граничних умов (8), (9).

Використовуючи умову рівності нулю дотичного напруження, виражаємо сталі $B_n^{(i)}$ через $A_n^{(i)}$, після чого, розкладаючи напруження та швидкості в ряди Фур'є, спочатку в просторі зображень, а потім і в просторі оригіналів отримуємо таке зображення n -го коефіцієнта

ряду Фур'є напруження σ_{zz} на фронтальній поверхні тіл через відповідний Фур'є-коефіцієнт заданої швидкості:

$$\sigma_{zz}^{(i)}(t, x, 0) = (-1)^i \xi^{i-1} \frac{\alpha^{(i)}}{\beta^{(i)2}} \left(V^{(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t V_n^{(i)}(\tau) F_n^{(i)}(t-\tau) d\tau \cos(nx) \right), \quad (12)$$

$$F_n^{(i)}(t) = -\alpha^{(i)} n J_1(\alpha^{(i)} nt) + 4n^2 \beta^{(i)2} \int_0^t \left(J_0(\alpha^{(i)} n\tau) - \frac{\beta^{(i)}}{\alpha^{(i)}} J_0(\beta^{(i)} \tau) \right) \left(1 + n^2 \beta^{(i)2} \frac{(t-\tau)^2}{2} \right) d\tau. \quad (13)$$

Тут $J_0(t)$, $J_1(t)$ — циліндричні функції Бесселя першого роду нульового та першого порядку відповідно.

Таким чином, співвідношення (12), (13) дозволяють визначити нормальне напруження $\sigma_{zz}(t, z, 0)$ на поверхнях тіл через задану на ній швидкість $V(t, x)$.

Задовольняючи граничні умови (2), використовуючи залежність (12) між коефіцієнтами $\sigma_{zzn}^{(i)}(t)$ та $V_n^{(i)}(t)$, отримуємо такі рівняння для визначення коефіцієнтів розкладання в ряди Фур'є швидкості деформування поверхні $V_n^{(i)}(t)$:

$$V_n^{(1)}(t) + \frac{1}{1+\delta} \left[\int_0^t V_n^{(1)}(\tau) (\delta F_n^{(2)}(t-\tau) + F_n^{(1)}(t-\tau)) d\tau - \delta \int_0^t V_{cn}(\tau) F_n^{(2)}(t-\tau) d\tau \right] = \frac{\delta}{1+\delta} V_{cn}, \quad (14)$$

$$V_n^{(2)}(t) + \frac{1}{1+\delta} \left[\int_0^t V_n^{(2)}(\tau) (F_n^{(1)}(t-\tau) + \delta F_n^{(2)}(t-\tau)) d\tau + \int_0^t V_{cn}(\tau) F_n^{(1)}(t-\tau) d\tau \right] = -\frac{1}{1+\delta} V_{cn}, \quad (15)$$

де

$$\delta = \xi \frac{\alpha^{(2)} \beta^{(1)2}}{\alpha^{(1)} \beta^{(2)2}}, \quad V_{c0}(t) = x^* \frac{V_c(0)}{l}, \quad V_{cn}(t) = \frac{2V_c(t) \sin nx^*}{l n}.$$

Таким чином, розв'язання задачі зводиться до розв'язання послідовності інтегральних рівнянь (14), (15), які повинні бути доповнені рівняннями руху центрів мас тіл (4), в яких сила $F^{(i)}(t)$ має вигляд:

$$F^{(i)}(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{zzn}^{(i)}(t) \sin nx^*. \quad (16)$$

Визначивши з (14), (15) коефіцієнти швидкості $V_n^{(i)}(t)$, напруження $\sigma_{zz}^{(i)}(t, x, 0)$ на поверхні тіл знайдемо за допомогою співвідношень (8), (12).

3. Алгоритм розв'язання та результати. Під час чисельної реалізації інтеграли в системах (14), (15) та у співвідношенні (12) обчислювалися за формулою Грегорі [7]. Рівняння (4) з усіченою правою частиною розв'язувалося методом Адамса [8]. І в формулі

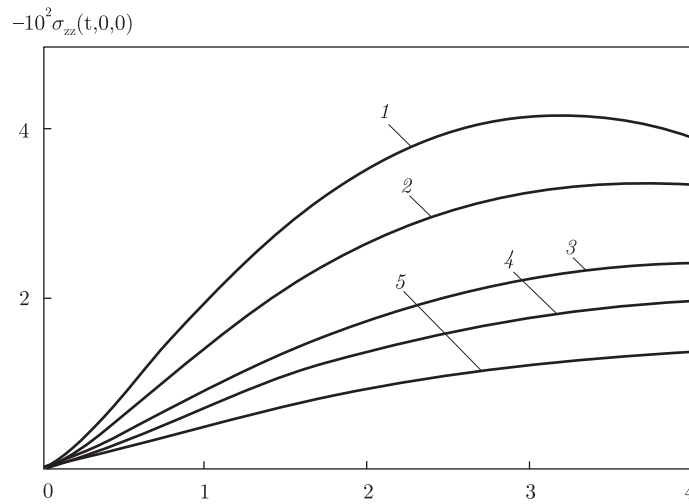


Рис. 2

Грегори, і в формулі Адамса утримувалися різниці до четвертого порядку включно. Нескінченні послідовності інтегральних рівнянь піддавалися редукції. Порядок редукції вибирався з міркувань практичної збіжності. Зокрема, достовірні результати з похибкою менше п'яти відсотків вдалося одержати при утриманні 100 рівнянь в нескінченних послідовностях (14), (15), при цьому крок інтегрування дорівнював $\Delta t = 0,02$. Для згладжування явищ Гіббса застосовувалися σ -множники Гіббса [7]. Метою розрахунків було визначення величини та характеру розвитку у часі нормального напруження, сили взаємодії, швидкості деформування поверхні, координат границі області контакту залежно від форми лобової поверхні, маси тіл та пружних характеристик матеріалу.

Чисельно розв'язувалася задача для випадку співудару двох циліндричних тіл, які мають кругові поперечні перерізи. Характеристики першого тіла — $\rho^{(1)} = 19,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $E^{(1)} = 34,5 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\nu^{(1)} = 0,28$, $R^{(1)} = 0,01 \text{ м}$, які відповідають вольфраму. Характеристики другого тіла варіювалися для кожного конкретного випадку. На рисунках наводяться знерозмірені у сталих $c_0^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, $R^{(1)}$ величини.

На рис. 2 демонструється зміна з часом величини нормального напруження в точці початкового контакту. Пружні характеристики другого тіла змінюються, а саме: крива 1 відповідає вольфраму ($\mu^{(2)}/K^{(2)} = 0,51$), 2 — сталі (0,49), 3 — титану (0,46), 4 — алюмінію (0,38), 5 — магнію (0,33). Очевидно, що зі зростанням $\mu^{(2)}/K^{(2)}$ максимальне значення нормального напруження зростає і досягається раніше.

На рис. 3 показана зміна з часом нормального напруження в лобовій точці, різні криві відповідають різним значенням радіуса другого тіла $R^{(2)}$ (1 — $R^{(2)} = 0,5$; 2 — $R^{(2)} = 1$; 3 — $R^{(2)} = 10$; 4 — $R^{(2)} = 50$; 5 — $R^{(2)} = 100$). Зі збільшенням радіуса другого тіла максимальне значення напруження зменшується і досягається раніше. Зауважимо, що у випадку, коли радіус другого тіла перевищує радіус першого більш ніж у 10 разів, різниця в результатах буде незначною.

Залежність величини нормального напруження $\sigma_{zz}(t, 0, 0)$ від маси взаємодіючих тіл демонструється на рис. 4 (крива 1 — $M^{(2)} = 100$; 2 — $M^{(2)} = 10$; 3 — $M^{(2)} = 6$; 4 — $M^{(2)} = 3$; 5 — $M^{(2)} = 1$). Зі збільшенням маси другого тіла збільшується тривалість співудару і максимальне значення $\sigma_{zz}(t, 0, 0)$, яке досягається пізніше.

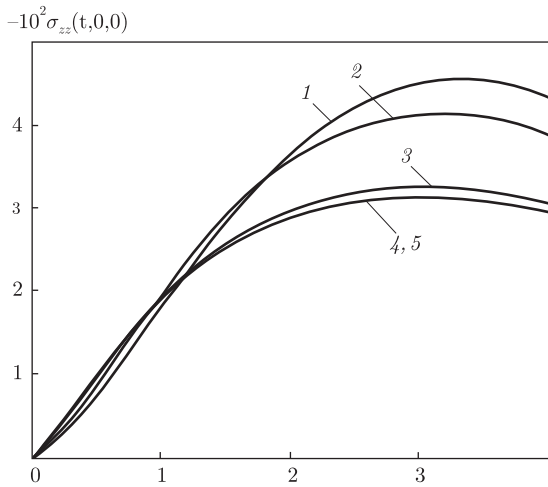


Рис. 3

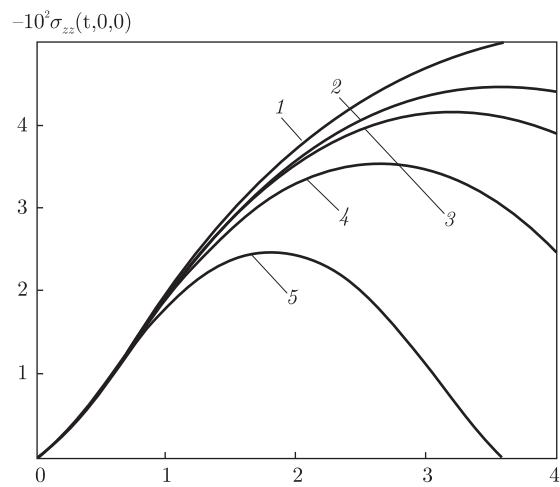


Рис. 4

Наведені результати дають змогу стверджувати, що розвинутий метод дозволяє визначити характеристики напружено-деформівного стану пружних тіл з затупленою фронтальною поверхнею та різними фізико-геометричними властивостями при їх центральному співударі, а також проаналізувати величину цих характеристик і характер їх зміни у часі залежно від фізико-механічних властивостей тіл.

1. Кубенко В. Д. Об одном способе решения задач проникания тел в акустическую или упругую среду // Материалы II Всесоюз. конф. "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред" (Ереван, 1984.) – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1984. – С. 183–187.
2. Кубенко В. Д. Удар осесимметричного тела о поверхность сжимаемой жидкости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 9. – С. 44–48.
3. Кубенко В. Д., Попов С. Н. Осесимметричная задача удара жесткого затупленного тела о поверхность упругого полупространства // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 7. – С. 16–24.
4. Кубенко В. Д., Попов С. Н. Плоская задача удара жесткого затупленного тела о поверхность упругого полупространства // Там же. – 1988. – **24**, № 7. – С. 69–77.
5. Kubenko V. D., Marchenko T. A. Axisymmetric collision problem for two identical elastic solids of revolution // Int. Applied Mechanics. – 2004. – **40**, No 7. – P. 766–775.
6. Kubenko V. D., Marchenko T. A. Plane collision problem for two identical elastic parabolic bodies – direct central impact // Ibid. – 2003. – **39**, No 7. – P. 812–822.
7. Хемминг Р. В. Численные методы. – Москва: Наука, 1968. – 400 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1984. – 831 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 19.12.2007