ДОПОВІДІ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

8 • 2008

МАТЕМАТИКА

УДК 517.43+517.5

© 2008

Член-кореспондент НАН України **М. Л. Горбачук, В. І. Горбачук**

Задача Коші для диференціальних рівнянь вищих порядків у банаховому просторі

The solutions to an abstract m-harmonic equation on $(0,\infty)$ are described. The necessary and sufficient conditions on initial data, under which the Cauchy problem for such an equation is solvable in the class of finite-order and finite-type entire vector-valued functions for a dense set of initial data, are presented.

Розглянемо абстрактну задачу Коші

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right)^m y(t) = 0, \qquad t \in (0,\infty),$$

$$y^{(i)}(0) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, 2m-1,$$

де B — позитивний оператор у комплексному банаховому просторі $\mathfrak{B}$, тобто B — щільно заданий в $\mathfrak{B}$ оператор такий, що

$$\exists\, M > 0, \quad \forall\, \lambda \geqslant 0\colon \quad \|(B + \lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{1+\lambda}.$$

Оскільки при $m = 1$ розглядуване рівняння є еліптичного типу, то ця задача не завжди має розв'язок.

У роботі даються умови на початкові дані $(y_0, y_1, \ldots, y_{2m-1})$, які гарантують її однозначну розв'язність; наводяться критерії існування розв'язку в класі цілих вектор-функцій заданого порядку росту $\rho < \infty$ і скінченного типу, а також умови на ρ, за яких така розв'язність має місце на щільній в $\mathfrak{B}^m$ множині початкових даних $(y_0, y_1, \ldots, y_{2m-1})$. Крім того, описуються усі розв'язки зазначеного рівняння на відкритому інтервалі $(0,\infty)$.

1. Нехай $\mathfrak{B}$ — банахів простір з нормою $\|\cdot\|$, $E(\mathfrak{B})$ — множина всіх щільно визначених в $\mathfrak{B}$ замкнених лінійних операторів, I — одиничний оператор, $\mathcal{D}(\cdot)$, $\rho(\cdot)$, $R_A(\cdot)$ — область визначення, резольвентна множина і резольвента оператора. Через $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ позначатимемо C_0-півгрупу лінійних операторів з генератором A (стосовно теорії півгруп у банаховому та локально опуклому просторах див. [1, 2]).

Для оператора $A \in E(\mathfrak{B})$ і числа $\beta \geqslant 0$ покладемо

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \operatorname*{ind\,lim}_{\alpha\to\infty} \mathfrak{G}_\beta^\alpha(A) = \bigcup_{\alpha>0} \mathfrak{G}_\beta^\alpha(A), \qquad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{\alpha\to 0} \mathfrak{G}_\beta^\alpha(A) = \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{G}_\beta^\alpha(A),$$

де

$$\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A) = \{x \in C^\infty(A) \mid \exists\, c = c(x) > 0, \forall\, k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \bigcup \mathbb{N}\colon \|A^k x\| \leqslant c\alpha^k k^{k\beta}\} \text{ —}$$

банахів простір відносно норми

$$\|x\|_{\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^k x\|}{\alpha^k k^{k\beta}},$$

а

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n) \text{ —}$$

простір нескінченно диференційовних векторів оператора A. Нагадаємо (див. [3]), що збіжність в $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)(\mathfrak{G}_{(\beta)}(A))$ означає збіжність в $\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)$ при деякому (при всіх) $\alpha > 0$.

Очевидно, що для довільних $\lambda \neq 0$, $\mu \in \mathbb{C}$

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(\lambda A + \mu I), \qquad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{G}_{(\beta)}(\lambda A + \mu I),$$

і за умови, що $\beta_1 < \beta_2$,

$$\mathfrak{G}_{(\beta_1)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_1\}}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta_2)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_2\}}(A).$$

Більше того,

$$P(A)\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A), \qquad P(A)\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta)}(A),$$

де $P(\lambda)$ — многочлен, і якщо $0 \in \rho(P(A))$, то

$$P(A)\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A), \qquad P(A)\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{G}_{(\beta)}(A).$$

Простори $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ і $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ називаються просторами аналітичних і цілих векторів оператора A відповідно.

Зауважимо, що простір $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ (а поготів і $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$) може складатися лише з нульового вектора. Але має місце таке твердження (порівн. з [4]).

Твердження 1. *Якщо A генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ у просторі $\mathfrak{B}$ з кутом аналітичності θ, то при $\beta > 1 - 2\theta/\pi$ $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$, а оператор-функція*

$$\exp(zA) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k A^k}{k!}$$

є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ з $\beta < 1$ і в $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ з $\beta \leqslant 1$. Сім'я $\{\exp(zA)\}_{z\in\mathbb{C}}$ утворює однопараметричну C_0-групу операторів у цих просторах, і якщо x належить до такого простору, то

$$\exp(tA)x = \begin{cases} e^{tA}x & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ (e^{-tA})^{-1}x & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

2. Нехай A — генератор C_0-півгрупи лінійних операторів в $\mathfrak{B}$. Далі припускатимемо, що $\ker e^{tA} = \{0\}$ для будь-якого $t > 0$. Без обмеження загальності вважатимемо також $\{e^{tA}\}_{t \geqslant 0}$ півгрупою стисків.

Позначимо через $\mathfrak{B}_{-t}(A)$ $(t > 0)$ поповнення $\mathfrak{B}$ за нормою

$$\|x\|_{-t} = \|e^{tA}x\|.$$

Норми $\|x\|_{-t}$ $(t > 0)$ є узгодженими і порівнянними на $\mathfrak{B}$. Отже, при $t < t'$ маємо щільне й неперервне вкладення $\mathfrak{B}_{-t}(A) \subseteq \mathfrak{B}_{-t'}(A)$. Покладемо

$$\mathfrak{B}_{-}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{t \to 0} \mathfrak{B}_{-t}(A).$$

Зазначимо, що для одержання $\mathfrak{B}_{-}(A)$ досить обмежитися просторами $\mathfrak{B}_{-\frac{1}{n}}(A)$, $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, $\mathfrak{B}_{-}(A)$ — повний зліченно-нормований простір (щодо зліченно-нормованих просторів і операторів у них див. [5]).

Оператор e^{tA} допускає неперервне розширення $\widetilde{U}(t)$ з $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}_{-t}(A)$, причому на підставі неперервності вкладення $\mathfrak{B}_{-t}(A)$ в $\mathfrak{B}_{-t'}(A)$ при $t < t'$ $\widetilde{U}(t')|_{\mathfrak{B}_{-t}(A)} = \widetilde{U}(t)$.

На просторі $\mathfrak{B}_{-}(A)$ задамо оператори $U(t)$ $(t \geqslant 0)$ таким чином:

$$\forall x \in \mathfrak{B}_{-}(A)\colon \quad U(t)x = \widetilde{U}(t)x \qquad \text{при} \qquad t > 0, \qquad U(0)x = x.$$

Теорема 1. *Сім'я $\{U(t)\}_{t \geqslant 0}$ утворює одностайно неперервну C_0-півгрупу лінійних операторів у просторі $\mathfrak{B}_{-}(A)$ із властивостями:*

1) $\forall\, t > 0\colon U(t)\mathfrak{B}_{-}(A) \subseteq \mathfrak{B}$;

2) $\forall\, t \geqslant 0, \forall\, x \in \mathfrak{B}\colon U(t)x = e^{tA}x$;

3) $\forall\, t, s > 0, \forall\, x \in \mathfrak{B}_{-}(A)\colon U(t+s)x = e^{tA}U(s)x = e^{sA}U(t)x$.

Якщо півгрупа $\{e^{tA}\}_{t \geqslant 0}$ є диференційовною при $t > 0$, то генератор $\widehat{A}$ півгрупи $\{U(t)\}_{t \geqslant 0}$ визначений на всьому просторі $\mathfrak{B}_{-}(A)$ і є замиканням A у цьому просторі.

Із теореми 1 і теореми про замкнений графік випливає

Наслідок 1. *Якщо півгрупа $\{e^{tA}\}_{t \geqslant 0}$ є диференційовною при $t > 0$, то вкладення $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_{-}(A)$ є строгим, оператор $\widehat{A}$ неперервним у просторі $\mathfrak{B}_{-}(A)$, а півгрупа $\{U(t) = e^{t\widehat{A}}\}_{t \geqslant 0}$ — нескінченно диференційовною на $[0, \infty)$ в $\mathfrak{B}_{-}(A)$.*

3. Розглянемо тепер рівняння вигляду

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right)^m y(t) = 0, \qquad t \in (0, \infty), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де B — позитивний оператор в $\mathfrak{B}$. Останнє означає, що $B \in E(\mathfrak{B})$, $(-\infty, 0] \in \rho(B)$ і існує стала $M > 0$ така, що

$$\forall \lambda \geqslant 0\colon \quad \|R_B(-\lambda)\| \leqslant \frac{M}{1 + \lambda}.$$

Як показано в [6, 7], у цьому випадку є визначеними дробові степені B^{α}, $0 < \alpha < 1$, оператора B, а оператор $A = -B^{1/2}$ генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу $\{e^{tA}\}_{t \geqslant 0}$ у просторі $\mathfrak{B}$ з від'ємним типом

$$\omega(A) = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln \|e^{tA}\|}{t}.$$

Під розв'язком рівняння (1) на $(0,\infty)$ розумітимемо $2m$ разів неперервно диференційовну в $\mathfrak{B}$ на $(0,\infty)$ вектор-функцію $y(t)$ таку, що $y^{(2k)} \in \mathcal{D}(B^{m-k})$ $(k=0,1,\ldots,m)$, $B^{m-k}y^{(2k)}$ неперервна в $\mathfrak{B}$ на $(0,\infty)$, і яка задовольняє (1). Підкреслимо, що жодних умов на поведінку розв'язку в околі нуля не вимагається.

Теорема 2. *Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння* (1) *на* $(0,\infty)$ *тоді і тільки тоді, коли її можна зобразити у вигляді*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k e^{t\widehat{A}} f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA) g_k, \tag{2}$$

де $A = -B^{1/2}$, $f_k \in \mathfrak{B}_-(A)$, $g_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Вектори f_k і g_k $(k=0,1,\ldots,m-1)$ однозначно визначаються за $y(t)$.

Наслідок 2. *Будь-який розв'язок рівняння* (1) *на* $(0,\infty)$ *є аналітичною на* $(0,\infty)$ *вектор-функцією в $\mathfrak{B}$.*

Наслідок 3. *Кожний розв'язок $y(t)$ рівняння* (1) *на* $(0,\infty)$ *і його похідні довільного порядку мають граничні значення в нулі у просторі $\mathfrak{B}_-(A)$.*

Теорема 3. *Для того щоб розв'язок рівняння* (1) *на* $(0,\infty)$ *був цілою вектор-функцією в $\mathfrak{B}$, необхідно і достатньо, щоб у його зображенні* (2) *$f_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ $(k=0,1,\ldots,m-1)$. За цієї умови $y(t)$ є цілою вектор-функцією в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.*

4. Перейдемо до задачі Коші для рівняння (1). Вона полягає у відшуканні за заданими векторами $y_0, y_1,\ldots,y_{2m-1} \in \mathfrak{B}_-(A)$ розв'язку $y(t)$ рівняння (1) на $(0,\infty)$, для якого

$$\lim_{t\to 0} y^{(i)}(t) = y_i, \qquad i=0,1,\ldots,2m-1 \tag{3}$$

(границя береться у просторі $\mathfrak{B}_-(A)$).

Зауважимо, що ця задача може не мати розв'язку, якщо $y_i \in \mathfrak{B}_-(A)$ довільні. Наприклад, у випадку $m=1$ розв'язок рівняння має вигляд

$$y(t) = e^{t\widehat{A}} f_0 + \exp(-tA) g_0, \qquad f_0 \in \mathfrak{B}_-(A), \qquad g_0 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

Ця вектор-функція задовольняє умову (3) з $m=1$ тоді і тільки тоді, коли

$$f_0 = \frac{1}{2}A^{-1}(y_1 + Ay_0), \qquad g_0 = -\frac{1}{2}A^{-1}(y_1 - Ay_0).$$

Отже, вона є розв'язком задачі Коші лише в тому випадку, коли $-(1/2)A^{-1}(y_1 - Ay_0) \in$ $\in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, що не завжди виконується (для $B = -d^2/dx^2$ це було відмічено в [8]).

Враховуючи, що для розв'язку $y(t)$ рівняння (1)

$$\left(\frac{d}{dt} + \widehat{A}\right)\left(\frac{d^2}{dt^2} - \widehat{A}^2\right)^{m-1} y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-1-i} C_{m-1}^i \widehat{A}^{2(m-i-1)} (y^{(2i+1)}(t) + \widehat{A} y^{(2i)}(t)) =$$
$$= (m-1)! 2^m \widehat{A}^m e^{t\widehat{A}} f_{m-1}$$

і

$$\left(\frac{d}{dt} - \widehat{A}\right)\left(\frac{d^2}{dt^2} - \widehat{A}^2\right)^{m-1} y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-1-i} C_{m-1}^i \widehat{A}^{2(m-i-1)} (y^{(2i+1)}(t) - \widehat{A} y^{(2i)}(t)) =$$
$$= (-1)^m (m-1)! 2^m A^m \exp(-tA) g_{m-1},$$

одержимо для f_{m-1} та g_{m-1} вирази

$$f_{m-1}=\widehat{A}^{-m}\sum_{k=0}^{2m-1}P_{m-1,k}(\widehat{A})y_k,\qquad g_{m-1}=\widehat{A}^{-m}\sum_{k=0}^{2m-1}Q_{m-1,k}(\widehat{A})y_k,$$

де $P_{m-1,k}(\widehat{A})$ і $Q_{m-1,k}(\widehat{A})$ — деякі многочлени від оператора $\widehat{A}$.

Знаючи тепер f_{m-1} і g_{m-1}, можемо зробити висновок, що якщо $y(t)$ — розв'язок задачі Коші (3) для рівняння (1), то вектор-функція

$$y_1(t)=y(t)-(t^{m-1}e^{t\widehat{A}}f_{m-1}+t^{m-1}\exp(-tA)g_{m-1})\ —$$

розв'язок задачі Коші

$$y_{1,i}=y_i\qquad\text{при}\qquad i=0,1,\ldots,m-2;$$
$$y_{1,i}=y_i-(m-1)!C_i^{m-1}\widehat{A}^{i-(m-1)}(f_{m-1}+(-1)^{i-m+1}g_{m-1})$$
$$\text{при}\qquad i=m-1,\ldots,2(m-1)-1$$

для рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-B\right)^{m-1}y_1(t)=0.$$

Так само, як це зроблено вище, знайдемо f_{m-2} і g_{m-2}. Вони будуть мати вигляд

$$f_{m-2}=\widehat{A}^{-(2m-1)}\sum_{k=0}^{2m-1}P_{m-2,k}(\widehat{A})y_k,\qquad g_{m-2}=\widehat{A}^{-(2m-1)}\sum_{k=0}^{2m-1}Q_{m-2,k}(\widehat{A})y_k.$$

Продовжуючи цю процедуру, для f_{m-i}, g_{m-i} $(i=1,\ldots,m)$ отримаємо формули типу

$$f_{m-i}=\widehat{A}^{-\frac{1}{2}(2m-i+1)i}\sum_{k=0}^{2m-1}P_{m-i,k}(\widehat{A})y_k,\qquad g_{m-i}=\widehat{A}^{-\frac{1}{2}(2m-i+1)i}\sum_{k=0}^{2m-1}Q_{m-i,k}(\widehat{A})y_k,$$

де $P_{m-i,k}(\widehat{A})$ і $Q_{m-i,k}(\widehat{A})$ — многочлени від оператора $\widehat{A}$. Звідси, на основі теореми 2, прийдемо до такого твердження: *задача Коші* (1), (3) *розв'язна тоді і тільки тоді, коли вектори* $\widehat{A}^{-\frac{1}{2}(2m-i+1)i}\sum_{k=0}^{2m-1}Q_{m-i,k}(\widehat{A})y_k$ $(i=0,1,\ldots,m-1)$ *є цілими векторами для оператора* A*; якщо розв'язок існує, то він єдиний.*

Із наведених міркувань також випливає така теорема.

Теорема 4. *Для того щоб задача Коші* (1), (3) *була коректно розв'язною у класі цілих вектор-функцій із значеннями в* $\mathfrak{B}$*, необхідно і достатньо, щоб* $y_k\in\mathfrak{G}_{(1)}(A)$*. За цих умов значення* $y(t)$ *також будуть належати до* $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$*.*

Тут під коректністю задачі (1), (3) у класі цілих $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій розуміється, що вона не лише однозначно розв'язна в цьому класі, але й її розв'язок неперервно залежить від початкових даних, а саме: якщо $y_{n,i}\to y_i$ $(n\to\infty)$ у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, то для відповідних розв'язків $y_n(t)$, $\|y_n(z)-y(z)\|\to 0$ $(n\to\infty)$ рівномірно на кожному компакті $K\subset\mathbb{C}$.

5. Розглянемо докладніше випадок розв'язності задачі Коші в класі цілих вектор-функцій.

Позначимо через $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ множину всіх цілих $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій. Говорять, що вектор-функція $y(z) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ є скінченного порядку росту, якщо існує число $\gamma \geqslant 0$ таке, що для достатньо великих $|z|$

$$\|y(z)\| \leqslant e^{|z|^{\gamma}}.$$

Точна нижня межа $\rho(y)$ таких γ — це порядок $y(z)$.

Нехай тепер число $\delta > 0$ — довільне фіксоване. Під степенем вектор-функції $y(z) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ відносно δ розумітимемо величину

$$\sigma(y,\delta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \max\limits_{|z|=r} \|y(z)\|}{r^{\delta}}.$$

Ясно, що якщо $y(z)$ має скінченний порядок $\rho = \rho(y)$ і $\delta < \rho$, то $\sigma(y,\delta) = \infty$, але якщо $\delta > \rho$, то $\sigma(y,\delta) = 0$. Величина $\sigma(y) = \sigma(y,\rho)$ (степінь $y(z)$ відносно її порядку) називається типом вектор-функції $y(z)$. Вектор-функцію $y(z) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ скінченного порядку, для якої $\rho(y) \leqslant 1$ і $\sigma(y,1) < \infty$, прийнято називати вектор-функцією експоненціального типу.

Для довільного числа $\rho > 0$ позначимо через $\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$ множину вектор-функцій $y(z) \in \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$, порядок яких не перевищує ρ і скінченного степеня відносно цього ρ. Покладемо також

$$\mathfrak{A}^{\rho}_{\alpha}(\mathfrak{B}) = \{y \in \mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B}) \mid \exists\, c > 0, \forall\, z \in \mathbb{C}\colon \|y(z)\| \leqslant c e^{\alpha |z|^{\rho}}\},$$

де $c = c(y) > 0$ — стала. Множина $\mathfrak{A}^{\rho}_{\alpha}(\mathfrak{B})$ — банахів простір з нормою

$$\|y\|_{\rho,\alpha} = \sup_{r\geqslant 0} e^{-\alpha r^{\rho}} \max_{|z|=r} \|y(z)\|.$$

Очевидно, що

$$\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B}) = \bigcup_{\alpha>0} \mathfrak{A}^{\rho}_{\alpha}(\mathfrak{B}).$$

У просторі $\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$ введемо топологію індуктивної границі просторів $\mathfrak{A}^{\rho}_{\alpha}(\mathfrak{B})$:

$$\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B}) = \operatorname*{ind\,lim}_{\alpha\to\infty} \mathfrak{A}^{\rho}_{\alpha}(\mathfrak{B}).$$

Тоді збіжність послідовності $y_n(z)$ до $y(z)$ у просторі $\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$ означає, що послідовність $\sigma(y_n,\rho)$ обмежена і $\|y_n(z) - y(z)\| \to 0$ $(n \to \infty)$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$. Неважко бачити, що $\mathfrak{A}^{1}(\mathfrak{B})$ — простір цілих $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій експоненціального типу.

Теорема 5. *Розв'язок $y(t)$ задачі Коші* (1), (3) *допускає продовження до цілої вектор-функції $y(z) \in \mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$ тоді і тільки тоді, коли $y_i \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$, де $\beta = (\rho-1)/\rho$. Більше того, якщо розв'язок $y(z)$ належить до $\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$, то $y(z) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ для довільного $z \in \mathbb{C}$ і задача Коші* (1), (3) *є коректною у такому розумінні: якщо $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) \ni y_{i,n} \to y_i$ $(n \to \infty)$ у просторі $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$, то послідовність відповідних розв'язків $y_n(z)$ збігається до $y(z)$ у просторі $\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$.*

Оскільки півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ є обмеженою аналітичною, то із твердження 1 і теореми 5 випливає, що множина початкових даних $(y_0, y_1, \ldots, y_{2m-1})$, для яких задача (1), (3) є розв'язною в $\mathfrak{A}^{\rho}(\mathfrak{B})$, є щільною у просторі $\mathfrak{B}^{2m}$ з $\rho > \pi/(2\theta) > 1$, де θ — кут аналітичності півгрупи. Що стосується випадку $\rho = 1$, то, на основі [9], щільність буде мати місце тоді, коли $\theta = \pi/2$ і виконується додаткова умова на ріст резольвенти оператора A, а саме:

$$\int\limits_0^1 \ln\ln M(s)\,ds < \infty, \qquad \text{де} \qquad M(s) = \sup_{|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant s} \|R_A(\lambda)\|.$$

Останнє завжди має місце, якщо B — додатно визначений самоспряжений оператор у гільбертовому просторі.

Зауважимо, що для абстрактних диференціальних рівнянь вищих порядків параболічного типу питання розв'язності задачі Коші в класі цілих вектор-функцій розглянуто в [10].

Робота виконана за підтримки ДФФД України (проект 14.1–003).

1. *Иосида К.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1967. – 624 с.
2. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York: Springer, 1983. – 279 p.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. – Москва: Физматгиз, 1959. – 684 с.
4. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht: Kluwer, 1991. – 347 p.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. Т 2. – Москва: Физматгиз, 1958. – 307 с.
6. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – Москва: Наука, 1967. – 464 с.
7. *Komatsu H.* Fractional powers of operators // Pacif. J. Math. – 1966. – **19**, No 2. – P. 285–346.
8. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений гиперболического типа. – Москва: Наука, 1978. – 352 с.
9. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 5. – С. 616–628.
10. *Xiao T., Liang J.* Entire solutions of higher order abstract Cauchy problems // J. Math. Annal. and Appl. – 1997. – **208**. – P. 298–310.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 29.01.2008