УДК 517.98



**М. Ф. Городній, Г. Ю. Ющенко**

# Про $l_p$-розв'язки різницевого рівняння з операторними коефіцієнтами

*(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. О. Перестюком)*

*We obtain a criterion for solutions of a linear difference equation with operator coefficients to be p-th power summable.*

**1. Формулювання основного твердження.** Нехай $B$ — комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ та нульовим елементом $\overline{0}$; $\mathcal{L}(B)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють із $B$ у $B$.

Покладемо

$$l_\infty(B) := \left\{x = \{x_n\colon n \in \mathbb{Z}\} \mid \|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty\right\}$$

і при $p \in [1;\infty)$

$$l_p(B) := \left\{x = \{x_n\colon n \in \mathbb{Z}\} \mid \|x\|_p := \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|^p\right)^{1/p} < \infty\right\}.$$

Зауважимо, що для кожного $p \in [1;\infty]$ $l_p(B)$ є комплексним банаховим простором з покоординатним додаванням елементів і множенням на комплексний скаляр і нормою $\|\cdot\|_p$.

Нехай $\{A_n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ — такий набір операторів із $\mathcal{L}(B)$, що $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|A_n\| < \infty$, $A\colon D \subset B \to$ $\to B$ — лінійний оператор з непорожньою резольвентною множиною $\rho(A)$. Відзначимо, що тоді оператор $A$ замкнений. У даній роботі досліджується питання про існування та єдиність розв'язку $x = \{x_n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ різницевого рівняння

$$Ax_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k x_{n+k} + y_n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

у просторі $l_p(B)$ при фіксованому $p \in [1;\infty)$. Тут $y = \{y_n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ — заданий елемент з $l_p(B)$. Аналогічне питання вивчалось в [1, 2] для випадку $p = \infty$ та в [3, 4] для випадку $p \in [1;\infty)$ і рівняння

$$x_{n+1} = Ax_n + A_1 x_{n-1} + \cdots + A_m x_{n-m} + y_n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Про застосування різницевих рівнянь вигляду (1) див. [2, 3].

Покладемо $S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $f(z) := \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} A_n z^n$, $z \in S$. Основний результат цієї роботи містить теорема 1.

**Теорема 1.** *Наведені нижче твердження еквівалентні.*

$a_1$) *Для деякого* $p \in [1;\infty]$ *різницеве рівняння* (1) *має для кожного* $y \in l_p(B)$ *єдиний розв'язок* $x$ *у просторі* $l_p(B)$.

*$a_2$) Для кожного $z \in S$ оператор $A - f(z)$ неперервно оборотний.*

*$a_3$) Твердження $a_1$ виконується для кожного $p \in [1;\infty]$.*

**2. Допоміжні результати.** У подальшому використовуються такі леми.

**Лема 1.** *Для того щоб різницеве рівняння (1) мало для кожного $y \in l_\infty(B)$ єдиний розв'язок $x$ у просторі $l_\infty(B)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалося твердження $a_2$ теореми 1.*

**Доведення.** Необхідність справджується внаслідок леми 1 роботи [1]. Для перевірки достатності досить скористатися міркуваннями, аналогічними наведеним при доведенні імплікації теореми 1 із [1]. Лему 1 доведено.

Нехай $\{E_n \colon n \in \mathbb{Z}\}$ — такий набір операторів із $\mathcal{L}(B)$, що $C_E := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|E_n\| < \infty$. Зафіксуємо $p \in [1;\infty]$. Покладемо для кожного $x \in l_p(B)$

$$\mathcal{E}_p x = \left\{ (\mathcal{E}_p x)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} E_k x_{n+k} \colon n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Неважко переконатися, що справджується таке твердження.

**Лема 2.** $\mathcal{E}_p \colon l_p(B) \to l_p(B)$ *— лінійний обмежений оператор і* $\|\mathcal{E}_p\| \leqslant C_E$.

Правильність наведеної нижче леми перевіряється тим же методом, що й леми 4 із [5].

**Лема 3.** *Якщо для деякого $q \in [1;\infty]$ оператор $\mathcal{E}_q$ неперервно оборотний, то для кожного $p \in [1;\infty]$ оператор $\mathcal{E}_p$ також неперервно оборотний.*

**3. Доведення теореми 1.** Досить довести еквівалентність твердження $a_1$ при фіксованому $p \in [1;\infty]$ та $a_2$.

Для кожного $u$, що належить області визначення $D$ оператора $A$, покладемо $\|u\|_D := = \|u\| + \|Au\|$. Тоді $(D, \|\cdot\|_D)$ — комплексний банахів простір. При $p \in [1;\infty]$ простір $l_p(D)$ визначимо аналогічно до $l_p(B)$. Зафіксуємо $\lambda \in \rho(A)$ і покладемо $T := (A - \lambda I)^{-1}$.

Зафіксуємо $p \in [1;\infty)$. Внаслідок леми 2 оператор $G \colon l_p(B) \to l_p(B)$, який визначається за правилом

$$Gx = \left\{ (Gx)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k x_{n+k} \colon n \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad x \in l_p(B),$$

є лінійним і обмеженим. Покладемо $\mathcal{A}x = \{(\mathcal{A}x)_n = Ax_n \colon n \in \mathbb{Z}\}$ для кожного $x \in l_p(D)$. Неважко переконатися, що $\mathcal{A} \colon l_p(D) \to l_p(B)$ — лінійний обмежений оператор. Тому оператор $\mathcal{G} \colon l_p(D) \to l_p(B)$, визначений співвідношенням $\mathcal{G}x = \mathcal{A}x - Gx$, $x \in l_p(D)$, також лінійний і обмежений, а отже, з урахуванням теореми Банаха про обернений оператор, твердження $a_1$ виконується тоді і тільки тоді, коли оператор $\mathcal{G}$ неперервно оборотний.

Нехай $\mathcal{T}x = \{(\mathcal{T}x)_n = Tx_n \colon n \in \mathbb{Z}\}$, $x \in l_p(B)$. Можна перевірити, що $\mathcal{T} \colon l_p(B) \to l_p(D)$, $\mathcal{T}$ — лінійний, обмежений та неперервно оборотний оператор. Тому оператор $\mathcal{G}$ неперервно оборотний у тому і тільки в тому випадку, коли є неперервно оборотним оператор $\mathcal{T}\mathcal{G}$, тобто коли для кожного $v \in l_p(D)$ різницеве рівняння

$$TAu_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (TA_k) u_{n+k} + v_n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

має єдиний розв'язок у просторі $l_p(D)$.

Скориставшись теоремою Банаха про обернений оператор та лемою 3, робимо висновок, що для виконання останнього твердження необхідно і достатньо, щоб рівняння (2) мало для кожного $v \in l_\infty(D)$ єдиний розв'язок $u$ в просторі $l_\infty(D)$. Тому, з урахуванням леми 1, оператор $\mathcal{G}$ неперервно оборотний тоді і тільки тоді, коли для кожного $z \in S$ є неперервно оборотним оператор

$$TA - \sum_{k\in\mathbb{Z}} TA_k z^k = T(A - f(z)).$$

Відзначимо, що оператор $T\colon B \to D$ лінійний, обмежений і неперервно оборотний. Тому $T(A - f(z))$ неперервно оборотний для кожного $z \in S$ тоді і тільки тоді, коли виконується твердження $a_2$.

При $p = \infty$ твердження $a_1$ та $a_2$ еквівалентні внаслідок леми 1. Теорему 1 доведено.


1. *Городній М. Ф.* Стаціонарні у широкому сенсі розв'язки різницевих рівнянь у банаховому просторі // Теорія ймовірностей та матем. статистика. – 2006. – Вип. 74. – С. 27–33.
2. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Київ: Вища шк., 1992. – 319 с.
3. *Баскаков А. Г.* Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ // Сиб. мат. журн. – 1997. – **38**, № 1. – С. 14–28.
4. *Городній* М. Ф. $l_p$-розв'язки одного різницевого рівняння в банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 3. – С. 425–430.
5. *Вятчанінов О. В., Городній М. Ф.* Властивості розв'язків дискретної системи Вольтерри в банаховому просторі // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 2. – С. 184–187.



*Київський національний університет*
*ім. Тараса Шевченка*



*Надійшло до редакції 03.12.2007*



УДК 519.6





Член-кореспондент НАН України **В. Л. Макаров**


# Функціонально-дискретний метод розв'язування задач на власні значення для нелінійних диференціальних рівнянь


*A new functional-discrete method to solve eigenvalue problems for ordinary differential operators of the Schrödinger type with nonlinear potentials is proposed. The method approximates both eigenvalues and eigenfunctions superexponentially. The efficiency of the method is illustrated by several numerical experiments.*


Розглядається задача

$$u''(x) + [\lambda - N(x, u(x))]u(x) = 0, \qquad x \in (0, 1), \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \qquad u'(0) = M, \qquad u(1) = 0, \tag{2}$$