4. *Abbaoui K., Pujol M. J., Cherruault Y. et al.* A new formulation of Adomian method: convergence result // Kybernetes. – 2001. – **30**, No 9–10. – P. 1183–1191.
5. *Makarov V. L.* A functional-difference method of arbitrary order of accuracy for solving the Sturm–Liouville problem with piecewise-smooth coefficients // Soviet. Math. Dokl. – 1992. – **44**, No 2. – P. 391–396.
6. *Akhmet M. U.* Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type // Nonlinear Anal. – 2007. – **66**, No 2. – P. 367–383.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 11.04.2008

УДК 519.21

І. В. Малик, В. К. Ясинський

Експоненціальна поведінка в середньому квадратичному розв'язку стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу в критичному випадку

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Conditions for the mean square stability of linear stochastic differential-difference equations of the neutral type in the critical case are obtained.

На імовірнісному базисі [1] $(\Omega, F, P, \mathrm{Im})$, де $\mathrm{Im} \equiv \{F_t, t \geqslant 0\}$ — фільтрація, задано сильний розв'язок [1, 2] $x(t) = x(t, \omega) \in R^1$ лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу (ЛСДРРНТ)

$$d\{Dx_t\} = \{Lx_t\}dt + \{Gx_t\}dw(t) \tag{1}$$

за початковою умовою

$$x_0 = \varphi. \tag{2}$$

Тут $x_t \equiv \{x(t+s), -h \leqslant s \leqslant 0\} \in C([-h, 0])$; $\varphi \in C([-h, 0])$ — F_0 — вимірний випадковий процес; $w(t) = w(t, \omega)$ — одновимірний випадковий вінерів процес, що узгоджений з $\mathrm{Im} = \{F_t, t \geqslant 0\}$; D, L, G — різницеві оператори, що задані на просторі співвідношеннями [3, 4] для $\psi \in C([-h, 0])$

$$D\psi \equiv \psi(0) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k \psi(-\tau_k), \qquad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n \leqslant h;$$

$$L\psi \equiv \alpha\psi(0) + \sum_{k=1}^{m} b_k \psi(-\lambda_k), \qquad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m \leqslant h; \tag{3}$$

$$G\psi \equiv f\psi(0) + \sum_{k=1}^{q} g_k \psi(-\theta_k), \qquad 0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q \leqslant h.$$

Для ЛСДРРНТ (1), (2) має місце теорема існування та єдиності з точністю до стохастичної еквівалентності сильного розв'язку $x(t) \in R^1$ [1] для якого існує $E\{x^2(t)\} < \infty$.

Поряд з рівнянням (1) розглянемо детерміноване диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу (ДДРРНТ) [3, 5]

$$d\{Dy_t\} = \{Ly_t\}dt \tag{4}$$

за початковою умовою

$$y(t) = \varphi(t), \qquad -h \leqslant t \leqslant 0. \tag{5}$$

Лема 1. *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{n} |\delta_k| < 1, \tag{6}$$

то розв'язок $y(t) \equiv 0$ *ДДРРНТ* (4), (5) *є експоненціально стійкий тоді і тільки тоді, коли всі корені характеристичного квазіполінома*

$$V(z) \equiv z\left(1 + \sum_{k=1}^{n} e^{-z\tau_k}\delta_k\right) - a - \sum_{l=1}^{m} e^{-z\lambda_l} b_l \tag{7}$$

лежать у лівій півплощині комплексної площини $\mathbf{C}$ *[6], тобто*

$$\exists \rho > 0, \qquad \forall z \in \mathbf{C}\colon \quad V(z) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} z < -\rho. \tag{8}$$

Нехай $X(t)$ [7] — розв'язок (4), що задовольняє початкову умову

$$X(t) \equiv 1(t) = \begin{cases} 0, & -h \leqslant t < 0; \\ 1, & t = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Лема 2. *Розв'язок ЛСДРРНТ* (1), (2) *задовольняє рівняння*

$$x(t) = y(t) + \int_0^t X(t-s) G x_s dw(s), \tag{10}$$

де $y(t)$ *— розв'язок* (4), (2).

Розглянемо поведінку розв'язку ЛСДРРНТ (1), (2), якщо $B = 1$, де

$$B \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |G(is)|^2 |V(is)|^{-2} ds. \tag{11}$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (6), (8), *справджується рівність*

$$B = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |G(is)|^2 |V(is)|^{-2} ds = 1, \tag{12}$$

а також

$$f + \sum_{k=1}^{q} g_k \neq 0. \tag{13}$$

Тоді знайдеться початкова функція φ, така що

$$0 < \lim_{t\to\infty} E|x(t)|^2 < \infty.$$

Доведення. Нехай сильний розв'язок (1) побудовано за функцією

$$x(t) \equiv \varepsilon 1(t) = \begin{cases} 0, & -h \leqslant t < 0, \\ \varepsilon, & t = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Тоді $y(t) = \varepsilon X(t)$ є розв'язком детермінованого рівняння (4), а рівняння для $\Gamma(t,\varphi)$ набуде вигляду

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}dt = \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}dt\left(\varepsilon + \int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}dt\right), \tag{15}$$

де

$$\Gamma(t,\varphi) \equiv E\{|\gamma(t)|^2/F^0\} = E\{|\gamma(t)|^2\}, \tag{16}$$

$$\gamma(t) \equiv Gy_t + \int_0^t H(t-s)\gamma(t)\,dw(s), \tag{17}$$

$$H(t) \equiv GX_t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} z=\mu} e^{zt}G_1(z)V^{-1}(z)\,dz. \tag{18}$$

Звідси

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-zt}dt = \frac{\varepsilon\displaystyle\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}dt}{\left(1 - \displaystyle\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}dt\right)}. \tag{19}$$

Відомий факт зв'язку поведінки при $t \to \infty$ оригіналу $\Gamma(t,\varphi)$ і при $z \to 0$ зображення для нього [8] має вигляд

$$\lim_{t\to\infty}\Gamma(t,\varphi) = \varepsilon\lim_{z\to 0}\frac{z\displaystyle\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}dt}{\left(1 - \displaystyle\int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt}dt\right)}. \tag{20}$$

Границя при $z \to 0$ у правій частині рівняння (20) дорівнює

$$\lim_{z\to 0} \frac{\varepsilon z \int\limits_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt} ds}{\left(1 - \int\limits_0^\infty |H(t)|^2 e^{-zt} dt\right)} = \frac{\varepsilon}{\int\limits_0^\infty |H(t)|^2 t dt}. \tag{21}$$

При виконанні умов (8) існує інтеграл у знаменнику правої частини (21)

$$\varepsilon = \varepsilon \int\limits_0^\infty |H(t)|^2 dt \leqslant \int\limits_0^\infty |H(t)|^2 t dt \leqslant K \int\limits_0^\infty |H(t)|^2 e^{\rho t/2} dt = c < \infty, \tag{22}$$

де $K = 2 : \rho$.

Значить, одержимо нерівність

$$\frac{\varepsilon}{c} \leqslant \lim_{t\to\infty} \Gamma(t, \varphi) \leqslant 1. \tag{23}$$

Оскільки $\Gamma(t,\varphi) = M\{Gx_t\}^2$, то за умови існування $\lim\limits_{t\to\infty} \Gamma(t,\varphi)$ можна довести, що

$$\lim_{t\to\infty} \Gamma(t,\varphi) = \left(f + \sum_{k=1}^q g_k\right)^2 \lim_{t\to\infty} M\{x^2(t)\}. \tag{24}$$

Теорема 1 доведена.

Поряд з рівнянням (1) буде розглядатися збурене рівняння

$$d\{Dx_t\} = \{Lx_t\}dt + (1+\alpha(t))\{Gx_t\}dw(t). \tag{25}$$

Припустимо, що виконується умова (11). Позначимо через Re_1, Re_2 простори неперервних на $[0,\infty)$ функцій ϕ, для яких

$$\mathrm{Re}_1 = \{\phi\colon \exists\, \varepsilon \in (0,1), \forall\, t > 0\colon (1+\phi(t))^2 < 1-\varepsilon\}.$$

$$\mathrm{Re}_2 = \{\phi\colon \exists\, \varepsilon > 0, \forall\, t > 0\colon (1+\phi(t))^2 > 1+\varepsilon\}.$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (6), (8) *та* $B = 1$. *Тоді:*

А) тривіальний розв'язок рівняння (25) *асимптотично стійкий в середньому квадратичному, якщо* $\alpha \in \mathrm{Re}_1$*;*

Б) тривіальний розв'язок рівняння (25) *нестійкий у середньому квадратичному, якщо* $\alpha \in \mathrm{Re}_2$.

Доведення. Доведемо, наприклад, частину А. Рівняння (25) набуде вигляду

$$x(t) = y(t) + \int\limits_0^t (1+\alpha(s)) X(t-s) G x_s dw(s), \tag{26}$$

де $y(t)$ — розв'язок задачі (4), (2), $X(t)$ — фундаментальний розв'язок, $t \geqslant 0$.

Тоді, використовуючи інтегральне рівняння (26) та (16), отримаємо

$$\Gamma(t,\varphi) = |Gy_t|^2 + \int\limits_0^t (1+\alpha(s))^2 |H(t-s)|^2 \Gamma(s,\varphi)\, ds. \tag{27}$$

Нехай $\alpha \in \mathrm{Re}_1$. Тоді рівність (27) можна замінити на нерівність

$$\Gamma(t,\varphi) < |Gy_t|^2 + (1-\varepsilon) \int\limits_0^t |H(t-s)|^2 \Gamma(s,\varphi)\, ds. \tag{28}$$

Використовуючи перетворення Лапласа, отримаємо нерівність для образів, а саме

$$\int\limits_0^\infty \Gamma(t,\varphi) e^{-\lambda t} dt < \int\limits_0^\infty |Gy_t|^2 e^{-zt} dt \left(1 - (1-\varepsilon) \int\limits_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda t} ds \right)^{-1}. \tag{29}$$

За умови виконання $B = 1$, очевидно, що полюс з найбільшою дійсною частиною для правої частини нерівності (29) буде полюс λ_0, для якого виконується рівність

$$\int\limits_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda_0 t} dt = \frac{1}{1-\varepsilon} > 1. \tag{30}$$

Дійсно, перетворення Лапласа дійсного аргументу ($\lambda \in \mathbb{R}$) є спадною неперервною функцією та $B = 1$, то $\lambda_0 < 0$. А це означає, що $\Gamma(t,\varphi)$ поводить себе на ∞ як функція, яка за модулем не перевищує $Ne^{\lambda_0 t}$, $N > 0$, тобто

$$\lim_{t\to\infty} \Gamma(t,\varphi) = 0. \tag{31}$$

Частину A теореми 2 доведено. Аналогічно можна довести частину B.

Зауваження 1. В умові теореми 2 простори Re_1 та Re_2 можна замінити на "ширші простори", а саме

$$\widetilde{\mathrm{Re}}_1 \equiv \{\phi \in C^0([0,\infty])\colon \exists\, \varepsilon > 0, \forall\, t \in [0,h]\colon (1+\phi(t))^2 < 1-\varepsilon; \forall\, t > h\colon (1+\phi(t))^2 \leqslant 1\},$$

$$\widetilde{\mathrm{Re}}_2 \equiv \{\phi \in C^0([0,\infty])\colon \exists\, \varepsilon > 0, \forall\, t \in [0,h]\colon (1+\phi(t))^2 > 1+\varepsilon; \forall\, t > h\colon (1+\phi(t))^2 \geqslant 1\}.$$

Доведення. Доведемо, наприклад, першу частину зауваження:

Нерівність (28) перепишемо у вигляді

$$\Gamma(t,\varphi) \leqslant |Gy_t|^2 + (1-\varepsilon) \int\limits_0^t |H(t-s)|^2 \Gamma(s,\varphi)\, ds \qquad \text{для} \qquad t \in [0,h],$$

$$\Gamma(t,\varphi) \leqslant |Gy_t|^2 + (1-\varepsilon) \int\limits_0^h |H(t-s)|^2 \Gamma(s,\varphi)\, ds + \int\limits_h^t |H(t-s)|^2 \Gamma(s,\varphi)\, ds \quad \text{для} \quad t > h.$$

Тоді нерівність (29) перепишеться у вигляді

$$\int_0^\infty \Gamma(t,\varphi)e^{-\lambda t}dt < \int_0^\infty |Gy_t|^2 e^{-zt}dt\left(1 - \int_0^\infty |H(t)|^2 e^{-\lambda t}dt + \varepsilon\int_0^h |H(t)|^2 e^{-\lambda t}dt\right)^{-1}. \qquad (32)$$

Оскільки $B = 1$ та $\int_0^h |H(t)|^2 e^{-\lambda t}dt = K > 0$, то можна стверджувати, що всі полюси правої частини (32) лежать у лівій півплощині комплексної площини, а це означає, що $\Gamma(t,\varphi)$ на ∞ поводить себе як експонента з від'ємним показником, тобто розв'язок збуреного рівняння (25) експоненціально стійкий у середньому квадратичному. Зауваження 1 доведено.

1. *Береза В. Ю, Ясинський В. К.* Про існування розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу з пуассонівськими перемиканнями // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. 5. – С. 19–27.
2. *Снекторский И. Я.* Обобщенные формулы вариации постоянной линейного неоднородного стохастического уравнения // Пробл. управления и информатики. – 1998. – № 5. – С. 107–112.
3. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. – Москва: Мир, 1967. – 545 с.
4. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
5. *Хусаинов Д. Я, Шатырко А. В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев: Изд-во КНУ, 1997. – 236 с.
6. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією: Монографія. – Рівне: Вид-во УДУВГП, 2003. – 288 с.
7. *Хусаинов Д. Я.* Оценки решений линейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Укр. мат. журн. – 1991. – № 9. – С. 1123–1135.
8. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – Москва: Наука, 1971. – 288 с.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 20.02.2008