УДК 517.927

В. А. Михайлец, Н. В. Рева

Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. С. Самойленко)

The limit theorems for the solutions of linear matrix differential equations in the Sobolev's $W_{n,p}$-norms are established. The case of the uniform C-norm was studied earlier by many authors in detail. Some applications are given.

Вопросы предельного перехода в системах дифференциальных уравнений исследовались многими математиками. Так, И. И. Гихман [1], а познее М. А. Красносельский и С. Г. Крейн [2], Я. Курцвейль и З. Ворель [3] и др. доказали ряд глубоких теорем о характере зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра. Бо́льшая их часть связана с обоснованием известного принципа усреднения Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова (см., напр., [4]) в нелинейной механике и характеризуются общей точкой зрения на линейный и нелинейный случаи. Для матричных линейных дифференциальных уравнений эти результаты развивались и уточнялись В. Рейдом [5], А. Ю. Левиным [6], З. Опелем [7], Нгуен Тхе Хоаном [8] и др. применительно к равномерной метрике. В данной работе аналогичный вопрос, по-видимому, впервые исследуется в нормах соболевских пространств $W_{n,p}$ и мотивирован приложениями к теории общих и обобщенных краевых задач. Эти приложения основываются на результатах данной работы и будут приведены в другой публикации.

1. Матрицант. Пусть $[a,b]$ — компактный интервал вещественной оси, а числа $m,n \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$. Обозначим через $Y(t)$ единственное решение (матрицант) линейного дифференциального уравнения

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \qquad t \in (a,b), \tag{1}$$

с начальным условием в некоторой фиксированной точке

$$Y(t_0) = I_m, \qquad t_0 \in [a,b], \tag{1a}$$

где I_m — единичная $(m \times m)$-матрица. Относительно комплекснозначного коэффициента уравнения, предполагается, что

$$A(\cdot) \in W_{n-1,p}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m}) =: W^{m\times m}_{n-1,p},$$

$$W^{m\times m}_{0,p} := L_p([a,b],\mathbb{C}^{m\times m}).$$

При $n = 1$ коэффициент $A(\cdot)$, вообще говоря, неограничен на $[a,b]$ и может иметь бесконечное множество точек разрыва. В этом случае матричная функция $Y(t)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяет уравнению (1) почти всюду.

Рассмотрим вопрос о корректности задачи (1)–(1a) в пространствах Соболева $W^{m\times m}_{n,p}$ с нормой $\|\cdot\|_{n,p}$, которая сильнее, чем норма пространства $C^{n-1}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$. Для этого введем метрические пространства невырожденных комплексных матриц-функций

$$\mathcal{Y}^{t_0}_{n,p} := \{Y(t) \in W^{m\times m}_{n,p} \colon Y(t_0) = I_m,\ \det Y(t) \neq 0\}$$

с метрикой

$$d_{n,p}(Y,Z) := \|Y(\cdot) - Z(\cdot)\|_{n,p},$$

которая не зависит от выбора точки t_0. Справедлива

Теорема 1. *Нелинейное отображение*

$$A(\cdot) \mapsto Y(\cdot)$$

в задаче (1)–(1a) *является гомеоморфизмом банахова пространства* $W^{m\times m}_{n-1,p}$ *на метрическое пространство* $\mathcal{Y}^{t_0}_{n,p}$ *при всех рассматриваемых значениях параметров* n, p *и* t_0.

2. Задача Коши. Рассмотрим теперь параметризированное числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ семейство неоднородных задач Коши

$$Y'(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)Y(t,\varepsilon) + F(t,\varepsilon), \qquad Y(t_\varepsilon,\varepsilon) = C_\varepsilon, \tag{2}$$

где предполагается, что $A(\cdot,\varepsilon)$, $F(\cdot,\varepsilon) \in W^{m\times m}_{n-1,p}$; $C_\varepsilon \in \mathbb{C}^{m\times m}$; t, $t_\varepsilon \in [a,b]$.

Следующее утверждение является основным результатом работы.

Теорема 2. *Пусть при* $\varepsilon \to 0$ *выполнены условия:*

$$\|A(\cdot,\varepsilon) - A(\cdot,0)\|_{n-1,p} \to 0, \qquad \|F(\cdot,\varepsilon) - F(\cdot,0)\|_{n-1,p} \to 0,$$

$$C_\varepsilon \to C_0, \qquad t_\varepsilon \to t_0.$$

Тогда однозначно определенные решения задач (2) *удовлетворяют предельному соотношению*

$$\|Y(\cdot,\varepsilon) - Y(\cdot,0)\|_{n,p} \to 0, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{3}$$

Заметим, что если

$$F(\cdot,\varepsilon) \equiv 0, \qquad C_\varepsilon \equiv C_0, \qquad t_\varepsilon \equiv t_0,$$

то из теоремы 1 следует, что условие $\|A(\cdot,\varepsilon) - A(\cdot,0)\|_{n-1,p} \to 0$ является не только достаточным, но и необходимым для справедливости предельного соотношения (3).

Приведем некоторые приложения теоремы 2.

3. Системы уравнений высокого порядка. Рассмотрим задачу Коши для линейного матричного дифференциального уравнения порядка $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} Z^{(k)}(t,\varepsilon) + P_{k-1}(t,\varepsilon)Z^{(k-1)}(t,\varepsilon) + \dots + P_0(t,\varepsilon)Z(t,\varepsilon) = F(t,\varepsilon), \\ Z^{(j-1)}(t_\varepsilon,\varepsilon) = C_{j-1,\varepsilon}, \qquad j \in \{1,2,\dots k\} =: J. \end{cases} \tag{4}$$

Будем предполагать, что

$$P_{j-1}(\cdot,\varepsilon) \in W^{m\times m}_{n-1,p}, \quad F(\cdot,\varepsilon) \in W^{m\times m}_{n-1,p}, \quad C_{j-1,\varepsilon} \in \mathbb{C}^{m\times m}, \quad t_\varepsilon \in [a,b], \quad j \in J. \tag{5}$$

Из теоремы 2 вытекает, что справедлива

Теорема 3. *Пусть при* $\varepsilon \to 0$ *выполнены условия:*

$$\|P_{j-1}(\cdot,\varepsilon) - P_{j-1}(\cdot,0)\|_{n-1,p} \to 0, \qquad \|F(\cdot,\varepsilon) - F(\cdot,0)\|_{n-1,p} \to 0,$$

$$C_{j-1,\varepsilon} \to C_{j-1,0}, \qquad t_\varepsilon \to t_0, \qquad j \in J.$$

Тогда однозначно определенные решения задач (4) *удовлетворяют предельным соотношениям:*

$$\|Z^{(j-1)}(\cdot,\varepsilon) - Z^{(j-1)}(\cdot,0)\|_{n,p} \to 0, \qquad \varepsilon \to 0, \qquad j \in J.$$

Теорему 3 можно рассматривать как некоторое обобщение теоремы 2. Она содержательна и в скалярном случае $m = 1$, если $k \geqslant 2$.

4. Непрерывная зависимость решения от параметра. Пусть для неоднородной задачи Коши (4) выполнены условия (5). Из теоремы 3 следует, что справедлива

Теорема 4. *Пусть выполнены условия:*

1) функция $\varepsilon \mapsto t_\varepsilon$ *непрерывна на отрезке* $[0,\varepsilon_0]$*;*

2) для каждого $j \in J$ *отображения* $\varepsilon \mapsto C_{j-1,\varepsilon}$ *принадлежат классу* $C([0,\varepsilon_0],\mathbb{C}^{m\times m})$*;*

3) отображения $\varepsilon \mapsto F(\cdot,\varepsilon)$*,* $\varepsilon \mapsto P_{j-1}(\cdot,\varepsilon)$*,* $j \in J$*, принадлежат классу* $C([0,\varepsilon_0],W^{m\times m}_{n-1,p})$.

Тогда матричные функции $Z^{(j-1)}(\cdot,\varepsilon)$ *непрерывно зависят от парамера* ε *в метрике пространства* $W^{m\times m}_{n-1,p}$ *на отрезке* $[0,\varepsilon_0]$.

Исследования В. А. Михайлеца поддержаны ГФФИ Украины, грант 14.1/003.

1. *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр. матем. журн. – 1952. – **4**. – С. 215–219.
2. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, вып. 3. – С. 147–153.
3. *Курцвейль Я., Ворель З.* О непрерывной зависимости линейных уравнений от параметра // Чехосл. мат. журн. – 1957. – **7**, № 4. – С. 568–583.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва: Физматгиз, 1955. – 447 с.
5. *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems // J. Different. Equat. – 1967. – **3**, No 3. – P. 423–439.
6. *Левин А. Ю.* Вопросы теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, 1 // Вестн. Ярослав. ун-та. – 1973. – Вып. 5. – С. 105–132.
7. *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations // J. Different. Equat. – 1967. – **3**. – P. 571–579.
8. *Нгуен Тхе Хоан.* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 6. – С. 970–975.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 21.11.2007