УДК 517.9

К. С. Халіна

Проблеми керованості для рівняння неоднорідної струни, закріпленої на правому кінці

(Представлено академіком НАН України Є. Я. Хрусловим)

The wave equation for a non-homogeneous string on a segment is considered. The right end point is fixed. On the left end point, L^∞-control that is bounded by a given constant is considered. Necessary and sufficient conditions of null- and approximate null-controllability for this system are found. Moreover, the control that solves the formulated problem is found explicitly.

Розглянемо хвильове рівняння на відрізку

$$w_{tt} = w_{xx} - q(x)w(x,t), \qquad x \in (0,d), \qquad t \in (0,T), \qquad d > 0, \qquad T > 0, \tag{1}$$

кероване крайовими умовами

$$w(0,t) = u(t), \qquad w(d,t) = 0, \qquad t \in (0,T). \tag{2}$$

Вважаємо, що функція $q(x)$ та керування u задовольняють умови:

$$q \in \mathcal{E}(0,d) = \{r \in C^1[0,d] \colon r(x) \geqslant 0, r'_+(0) = r'_-(d) = 0\},$$

$$u \in \mathcal{B}(0,T) = \{v \in L^\infty(0,T) \colon |v(t)| \leqslant 1 \text{ майже скрізь на } (0,T)\}.$$

На теперішній час керованість крайовими умовами для рівняння вигляду (1) з $q(x) = 0$ на скінченному відрізку в просторах Соболєва досить детально вивчена для різних типів керувань: для W_p^1-керувань [1, 6], для L^2-керувань [2, 3] ($p \in [1,\infty)$), для L^∞-керувань [3, 4] тощо. У роботі [7] досліджено W_2^1-керованість для рівняння (1) зі сталим $q > 0$. У всіх цих роботах, за виключенням [4], методом розподілу змінних та розвинення у ряди Фур'є одержано умови керованості у випадку, коли $q = 0$ або $q > 0$ і стале. У [4] одержано критерій керованості у випадку, коли керування обмежені наперед заданою сталою (тут $q = 0$). Замість розвинення в ряди Фур'є використано перетворення Фур'є.

Слід відзначити, що лише керування класу L^∞ можуть бути реалізовані практично. Більше того, керування мають бути обмежені наперед заданою сталою з практичних міркувань. Пояснюється це тим, що будь-який прилад, що здійснює керування, має обмежений діапазон дії.

Нижче досліджується керованість у просторах Соболєва узагальненого хвильового рівняння (1) з керуванням, що обмежене наперед заданою сталою, в крайових умовах. За допомогою операторів перетворення, що розглянуто в просторах Соболєва, ця задача зводиться до випадку $q = 0$, який досліджений у [4], та результати цієї роботи частково переносяться на випадок $q(x) \in \mathcal{E}(0,d)$.

У роботі розглядатимемо такі простори. Позначимо $\mathcal{S}$ — простір Шварца, $\mathcal{S}'$ — простір узагальнених функцій над $\mathcal{S}$,

$$\mathcal{W}^0 = \left\{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \colon f - \text{ непарна та } 2d\text{-періодична}\right\},$$

$$\mathcal{W}^s = \left\{f \in \mathcal{S}' \colon (1 + D^2)^{s/2} f \in \mathcal{W}^0\right\}, \qquad s \in \mathbb{R}, \qquad D = -i\frac{d}{dx},$$

з нормою $\|f\|^s = \left(\int\limits_{-d}^{d} |(1+D^2)^{s/2} f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$. Для $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}^s \times \mathcal{W}^{s-1}$ норма задається формулою $|||f|||^s = ((\|f_1\|^s)^2 + (\|f_2\|^{s-1})^2)^{1/2}$. Відзначимо, що якщо $f \in \mathcal{W}^s$, то $f' \in \mathcal{W}^{s-1}$, $s \in \mathbb{R}$. Під значенням узагальненої функції $f \in \mathcal{W}^l$ на основній функції $\varphi \in \mathcal{W}^{-l}$, $l \leqslant 0$ розуміємо

$$(f, \varphi) = \int\limits_{-d}^{d} (1 + D^2)^{l/2} f(x) \overline{(1 + D^2)^{-l/2} \varphi(x)}\, dx.$$

Добре відомо, що будь-яку функцію із простору $\mathcal{W}^0$ можна зобразити у вигляді збіжного ряду

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \frac{1}{\sqrt{d}} \sin\frac{\pi n x}{d}.$$

Отже, для $\forall f(x) \in \mathcal{W}^s$, $s \in \mathbb{R}$ справедливе

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \frac{1}{\sqrt{d}} \sin\frac{\pi n x}{d} \quad \wedge \quad \{f_n (1 + n^2)^{s/2}\}_{n=-\infty}^{+\infty} \in l^2.$$

Через $\mathcal{W}^s(0, d)$ позначимо звуження простору $\mathcal{W}^s$ на $[0, d]$ з нормою

$$\|f\|^s = \left(\int\limits_0^d |(1 + D^2)^{s/2} f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

Зауважимо, що якщо $f \in \mathcal{W}^s(0, d)$, то непарне $2d$-періодичне продовження f належить простору $\mathcal{W}^s$, $s \in \mathbb{R}$.

Далі в роботі вважаємо, що $s \leqslant 0$.

Розглянемо керовану систему (1), (2) з початковими умовами

$$w(x, 0) = w_0^0(x), \qquad w_t(x, 0) = w_1^0(x), \qquad x \in (0, d) \tag{3}$$

та умовами влучення

$$w(x, T) = w_0^T, \qquad w_t(x, T) = w_1^T(x), \qquad x \in (0, d), \tag{4}$$

де $w^0 = \begin{pmatrix} w_0^0 \\ w_1^0 \end{pmatrix}$, $w^T = \begin{pmatrix} w_0^T \\ w_1^T \end{pmatrix}$, w^0, $w^T \in \mathcal{W}^s(0, d) \times \mathcal{W}^{s-1}(0, d)$. Розв'язки системи (1)–(4) розглядаються в просторі $\mathcal{W}^s(0, d)$.

Означення 1. Стан $w^0 \in \mathcal{W}^s(0, d) \times \mathcal{W}^{s-1}(0, d)$ називається 0-керованим за час T, якщо для $w^T = 0$ існує керування $u \in \mathcal{B}(0, T)$ таке, що задача (1)–(4) має єдиний розв'язок в $\mathcal{W}^s(0, d)$, та ε-керованим за час T, якщо для $\forall\, \varepsilon > 0$ та для $w^T \in \mathcal{W}^s(0, d) \times \mathcal{W}^{s-1}(0, d)$

такого, що $|||w^T|||^s < \varepsilon$ існує керування $u_\varepsilon \in \mathcal{B}(0,T)$ таке, що задача (1)–(4) має єдиний розв'язок в $\mathcal{W}^s(0,d)$.

Нехай $W(\cdot,t)$, $W^0(x)$, $W^T(x)$ — непарні $2d$–періодичні продовження (за x) для $w(\cdot,t)$, $w^0(x)$, $w^T(x)$ відповідно, а $Q(x)$ — парне $2d$-періодичне продовження для $q(x)$.

Тоді W^0, $W^T \in \mathcal{W}^s \times \mathcal{W}^{s-1}$, $W(\cdot,t) \in \mathcal{W}^s$, $(t \in (0,T))$, $Q(x) \in C^1(\mathbb{R})$, і задача (1)–(4) буде зведена до такої:

$$W_{tt} = W_{xx} - Q(x)W(x,t) - 2u(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta'(x+2dk), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in (0,T), \tag{5}$$

$$W(x,0) = W_0^0(x), \qquad W_t(x,0) = W_1^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

$$W(x,T) = W_0^T(x), \qquad W_t(x,T) = W_1^T(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де δ — функція Дірака.

Враховуючи очевидну рівність $\|W(x,t)\|^s = \sqrt{2}\|w(x,t)\|^s$, можемо стверджувати про еквівалентність понять 0-(ε-)керованості задачі (1)–(4) та 0-(ε-)керованості задачі (5)–(7).

Для дослідження проблем керованості розглянемо задачу Штурма–Ліувілля на $(0,d)$

$$-v''(x) + q(x)v(x) = \lambda^2 v(x), \qquad x \in (0,d), \qquad q(x) \in \mathcal{E}(0,d), \tag{8}$$

$$v(0) = v(d) = 0. \tag{9}$$

Нехай $\{\mu_n = \lambda_n^2\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — власні значення (вони є дійсними та простими), $\{y_n(\lambda_n,x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система власних функцій оператора Штурма–Ліувілля. Маємо $\lambda_n \neq 0$, $n = \overline{1,\infty}$, а відповідні власні функції — дійсні і утворюють ортонормований базис в $L^2[0,d]$ (див., наприклад, [8]).

Позначимо $Y_n(\lambda_n,x)$ непарне $2d$-періодичне продовження для $y_n(\lambda_n,x)$, $n = \overline{1,\infty}$. Тоді

$$-Y_n'' + Q(x)Y_n = \lambda_n^2 Y_n, \qquad Y_n(\lambda_n, kd) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad k,n \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо число $N \in \mathbb{N}$ із нерівності $(N-1)d < T \leqslant Nd$. Неважко перевірити, що система $\{(1/\sqrt{2N})Y_n(\lambda_n,x)\}_{n=1}^{\infty}$ є ортонормованим базисом в $\mathcal{W}^0(-Nd,Nd)$. Також можна показати, що кожну функцію із $\mathcal{W}^s$ можна розкласти в збіжний ряд за системою $\{(1/\sqrt{2N})Y_n(\lambda_n,x)\}_{n=1}^{\infty}$.

У роботі використовуються також оператори перетворення для задачі Штурма–Ліувілля на відрізку (див., наприклад, [9]). Позначимо їх скорочено $\mathcal{K}$ та $\mathcal{L}$ і наведемо коротко основні факти, що будуть використовуватися.

Зафіксуємо $\lambda = \lambda_n$, $Y(\lambda,x) = Y_n(\lambda_n,x)$ і розглянемо дві задачі Коші

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1, \qquad x \in (-Nd,Nd), \tag{10}$$

$$y'' - Q(x)y + \lambda^2 y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1, \qquad x \in (-Nd,Nd). \tag{11}$$

Добре відомо, що $(\sin\lambda x)/\lambda$ є розв'язком задачі (10). Легко побачити, що $Y(\lambda,x)/y'(\lambda,0)$ є розв'язком (11). Тоді, згідно з [9],

$$\frac{Y(\lambda,x)}{y'(\lambda,0)} = \mathcal{K}\left(\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\right)(x) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x \mathtt{K}(x,t;\infty)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt, \qquad x \in (-Nd,Nd),$$

$$\frac{\sin\lambda x}{\lambda} = \mathcal{L}\left(\frac{Y(\lambda,t)}{y'(\lambda,0)}\right)(x) = \frac{Y(\lambda,x)}{y'(\lambda,0)} + \int\limits_0^x \mathtt{L}(x,t;\infty)\frac{Y(\lambda,t)}{y'(\lambda,0)}dt, \qquad x \in (-Nd, Nd),$$

де $\mathtt{K}(x,t;\infty) = \mathtt{K}(x,t) - \mathtt{K}(x,-t)$, $\mathtt{L}(x,t;\infty) = \mathtt{L}(x,t) - \mathtt{L}(x,-t)$. Неперервні ядра $\mathtt{K}(x,t)$ та $\mathtt{L}(x,t)$ є розв'язками таких систем на $(-Nd,Nd)\times(-Nd,Nd)$:

$$\mathtt{K}''_{xx}(x,t) - \mathtt{K}''_{tt}(x,t) = Q(x)\mathtt{K}(x,t), \qquad \mathtt{L}''_{xx}(x,t) - \mathtt{L}''_{tt}(x,t) = -Q(x)\mathtt{L}(x,t),$$

$$\mathtt{K}(x,x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x Q(\xi)\,d\xi, \qquad \mathtt{L}(x,x) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x Q(\xi)\,d\xi,$$

$$\mathtt{K}(x,-x) = 0, \qquad \mathtt{L}(x,-x) = 0.$$

Позначимо $\widehat{\mathcal{W}}_0^0(-Nd,Nd) = \overline{\mathrm{Lin}\left\{\dfrac{\sin\lambda_n x}{\lambda_n}\right\}_{n=1}^{\infty}} \subset \mathcal{W}^0(-Nd,Nd)$, де λ_n — корені з власних значень задачі Штурма–Ліувілля (8), (9), та

$$\widehat{\mathcal{W}}_0^s(-Nd,Nd) = \left\{f\colon f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\frac{\sin\lambda_n x}{\lambda_n} \wedge \left\{\frac{f_n}{\lambda_n}(1+\lambda_n^2)^{s/2}\right\}_{n=1}^{\infty} \in l^2\right\}.$$

Зауважимо, що $\widehat{\mathcal{W}}_0^s(-Nd,Nd) = (\widehat{\mathcal{W}}_0^{-s}(-Nd,Nd))'$, $s \leqslant 0$. Тоді оператори перетворення є лінійними та неперервними: $\mathcal{K}\colon \widehat{\mathcal{W}}_0^{-s}(-Nd,Nd) \to \mathcal{W}^{-s}(-Nd,Nd)$, $\mathcal{L}\colon \mathcal{W}^{-s}(-Nd,Nd) \to$ $\to \widehat{\mathcal{W}}_0^{-s}(-Nd,Nd)$. Отже, спряжені оператори $\mathcal{K}^*\colon \mathcal{W}^s(-Nd,Nd) \to \widehat{\mathcal{W}}_0^s(-Nd,Nd)$, $\mathcal{L}^*\colon$ $\widehat{\mathcal{W}}_0^s(-Nd,Nd) \to \mathcal{W}^s(-Nd,Nd)$ також лінійні та неперервні.

Зауваження 1. Визначимо число $h>0$ таке, що $|\lambda_n - n| < h$, $n\in\mathbb{N}$. Відомо, що якщо $h<1/4$, то система $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n=1}^{\infty}$ утворює базис Рісса в $L^2(-\pi,\pi)$ (див., наприклад, [10]). Отже, якщо $|\lambda_n - \pi n/d| < \pi h/d$ і $h<1/4$, то система $\{\sin\lambda_n x\}_{n=1}^{\infty}$ утворює базис Рісса в просторі $L^2(-d,d)$ непарних функцій. В цьому випадку маємо $\widehat{\mathcal{W}}_0^0(-Nd,Nd) = \mathcal{W}^0(-Nd,Nd)$.

Розвиваючи функції системи (5)–(7) в ряди за $\{(1/\sqrt{2N})Y_n(\lambda_n,x)\}_{n=1}^{\infty}$ та застосовуючи оператори перетворення, одержуємо критерій 0- та ε-керованості початкового стану задачі (1)–(4).

Теорема 1. *Нехай $T>0$, $w^0\in\mathcal{W}^s(0,d)\times\mathcal{W}^{s-1}(0,d)$, $s\leqslant 0$, $N\in\mathbb{N}$ — таке число, що $(N-1)d < T \leqslant Nd$. Тоді такі твердження рівносильні:*

(i) стан w^0 є 0-керованим за час T;

(ii) стан w^0 є ε-керованим за час T;

(iii) виконані умови

$$W_1^0(x) = (\mathcal{L}^*(\mathcal{K}^*W_0^0)')(x), \qquad |(\mathcal{K}^*W_0^0)(x)| \leqslant 2N, \qquad x\in(-Nd,Nd),$$

$$\operatorname{supp} w_0^0(x) \subset \begin{cases} [0, T-(N-1)d], & N \text{ — непарне,}\\ [Nd-T, d], & N \text{ — парне}\end{cases}$$

і при цьому керування задається формулою

$$u(t) = \frac{1}{2N}(\mathcal{K}^*W_0^0)(t), \qquad t\in[0,T]. \tag{12}$$

Зауваження 2. Із формули (12) видно, що $u\in L^\infty(0,T) \Leftrightarrow w_0^0 \in L^\infty(0,d)$.

1. *Krabs W., Leugering G.* On boundary controllability of one-dimension vibrating systems by $W_0^{1,p}$-controls for $p \in [0, \infty)$ // Math. Methods Appl. Sci. – 1994. – **17**. – P. 77–93.
2. *Gugat M., Leugering G.* Solutions of L^p-norm-minimal control problems for the wave equation // Comput. Appl. Math. – 2002. – **21**, No 1. – P. 227–244.
3. *Gugat M., Leugering G., Sklyar G.* L^p-optimal boundary control for the wave equation // SIAM J. Control Optim. – 2005. – **44**, No 1. – P. 49–74.
4. *Фардигола Л. В., Халіна К. С.* Проблеми керованості для рівняння струни // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 7. – С. 939–952.
5. *Эмануилов О. Ю.* Граничная управляемость гиперболическими уравнениями // Сиб. мат. журн. – 2000. – **41**, № 4. – С. 944–959.
6. *Ильин В. А.* Граничное управление процессом колебаний струны на одном ее конце при закрепленном втором конце при условии существования конечной энергии // Докл. АН. – 2001. – **378**, № 6. – С. 743–747.
7. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* О граничном управлении на одном конце процесса, описанного телеграфным уравнением // Там же. – 2002. – **387**, № 5. – С. 600–603.
8. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.
9. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 331 с.
10. *Translations* of Mathematical Monographs. Vol. 150. Lectures on Entire Functions, B. Ya. Levin // Americ. Math. Soc. – 1996. – 248 c.

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Веркіна НАН України, Харків

Надійшло до редакції 13.11.2007