

5. Hrytsyk V., Hrytsyk V. Determining validity and amount of received information under information transfer methods using corrective codes. – V Symp. modelowanie i symulacja komputerowa w technice. – Lodz, 2005. – P. 99–108.
6. Woznicki J. Podstawowe techniki przetwarzania obrazu. – Warszawa: Wydawnictwo komunikacji i Łacznosci, 1996. – P. 261.

Державний науково-дослідний інститут
інформаційної інфраструктури НАН України, Львів

Надійшло до редакції 13.03.2008

УДК 519.85

© 2008

Т. Е. Романова, А. В. Кривуля

Средства математического моделирования задач покрытия

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Г. Стояном)

The article considers theorems which are useful for the mathematical and computer modeling of the covering problems of a compact canonical multiconnected polygonal set with a finite family of convex polygons. Based on peculiarities of a rectangular cover, theorems concerning a partition of the translation vector space and an upper bound of the number of local extrema of the Γ -function are formulated.

Основой математического моделирования задач геометрического проектирования (задачи покрытия [1] и упаковки [2]) является аналитическое описание отношений точечных множеств в евклидовых пространствах. С этой целью используется метод Φ -функций [3–5]. Однако при математическом моделировании отношений двумерных φ -объектов [3], по крайней мере один из которых получен в результате пересечения базовых двухсвязных φ -объектов, возникает необходимость построения Φ -функций в виде композиций Φ -функций базовых объектов [4]. Конструктивным средством аналитического описания отношений области покрытия и семейства покрывающих объектов является Γ -функция [6]. Вид Γ -функции зависит от пространственных форм и метрических характеристик покрывающих объектов. В этой связи актуальны исследования такой зависимости для конечного семейства покрывающих прямоугольников, имеющих не обязательно различные метрические характеристики.

Пусть имеется компактное многосвязное каноническое многоугольное множество $\Omega \subset R^2$ и множество $P = \bigcup_{s=1}^{\tau} P_s \subset R^2$, где R^2 — двумерное арифметическое евклидово пространство; $P_s = \bigcup_{i=1}^{n_s} P_{si}$, $n_s \leq n$, P_{si} — выпуклый многоугольник; τ — число компонент связности множества P . Пусть $H = \bigcap_{s=1}^{\tau} H_s$, $H_s = R^2 \setminus \text{int } P_s$, $\text{int } P_s$ — внутренность P_s . При этом $H_s = \bigcup_{j=1}^{\lambda_s} C_{sj}$, где C_{sj} — выпуклое, многоугольное, канонически замкнутое, в общем случае неограниченное множество.

В дальнейшем, множество $T \subset R^2$, транслированное на вектор $w \in R^2$, обозначим $T(w)$.

Теорема 1. Пусть $H(w) = R^2 \setminus \text{int } P(w)$ и $\Phi_{sj}(w + w_{sj}, v) - \Phi$ -функция множеств $C_{sj}(w + w_{sj})$ и $\Omega(v)$, $w_{sj} = \text{const}$, $v \in R^2$, $j = 1, 2, \dots, \lambda$, $s = 1, 2, \dots, \tau$, тогда функция

$$\Phi(w, v) = \max_{s=1, \dots, \tau} \min_{j=1, \dots, \lambda} \Phi_{sj}(w + w_{sj}, v) \quad (1)$$

является Φ -функцией множеств $H(w)$ и $\Omega(v)$.

Пусть имеется семейство $\Lambda = \{P_i(u_i), i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}\}$ выпуклых многоугольников $P_i(u_i)$, $i \in I_n$.

Как известно [6], семейство Λ при $u_i = \text{const}$, $i \in I_n$, является покрытием области $\Omega(v)$, если любая точка $z \in \Omega(v)$ принадлежит хотя бы одному из $P_i(u_i)$, $i \in I_n$, т.е. выполняется условие

$$\Omega(v) \subseteq P(w) \quad \text{или} \quad \Omega(v) \cap \text{int } H(w) = \emptyset. \quad (2)$$

Теорема 2. Если $\Phi(w, v) - \Phi$ -функция множеств $H(w)$ и $\Omega(v)$ вида (1), то

$$\Phi(w, v) \geq 0 \quad (3)$$

является критерием покрытия (2) множества $\Omega(v)$ семейством Λ .

Замечание. Соотношение (3) можно рассматривать также в качестве условия трансляционного включения (2) при $w = \text{const}$ или условия взаимного непересечения множеств $H(w)$ и $\Omega(v)$ в задачах упаковки.

Теорема 3. Пусть $\Omega = \bigcup_{k=1}^K \Omega_k$, $\Omega_k = \text{conv}\{\omega_{kj} = (\tilde{x}_{kj}, \tilde{y}_{kj}), j \in I_{m_k}\}$, а $\Lambda -$ семейство прямоугольников $P_i(u_i) = \{(x, y) \in R^2, -a_i \leq x - x_i \leq a_i, -b_i \leq y - y_i \leq b_i\}$, $u_i = \text{const}$, $i \in I_n$, и выполняются условия теоремы (1). Тогда справедлива оценка сложности вычисления Φ -функции (1) для множеств $H(w)$ и $\Omega(v)$

$$\nu = \max_{l=1, \dots, 4} \xi_l,$$

где

$$\xi_1 = 4Kn, \quad \xi_2 = \sum_{k=1}^K (nm_k + 8n - m_k - 4), \quad \xi_3 = \sum_{k=1}^K (2nm_k + 12n - 3m_k - 14),$$

$$\xi_4 = \begin{cases} \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{4}n^2m_k + nm_k + n^2 + 8n - 2m_k - 12 \right), & \text{если } n = 2t, \quad t \in \mathbb{N}, \\ \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{4}n^2m_k + nm_k + n^2 + 8n - \frac{13}{4}m_k - 19 \right), & \text{если } n = 2t + 1, \quad t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Теорема 4. Пусть имеется $P_i(u_i) = \{(x, y) \in R^2, -a_i \leq x - x_i \leq a_i, -b_i \leq y - y_i \leq b_i\}$ и $P_j(u_j) = \{(x, y) \in R^2, -a_j \leq x - x_j \leq a_j, -b_j \leq y - y_j \leq b_j\}$, $u_{ij} = (u_i, u_j) \in R^4$, $i \neq j$. Тогда разбиение пространства R^4 имеет вид

$$1) R^4 = \bigcup_{q=1, q \neq 2}^{11} R_{ij}^q \quad \text{или} \quad R^4 = \bigcup_{q=1}^{10} R_{ij}^q, \quad \text{если } a_i \neq a_j \quad \text{и} \quad b_i \neq b_j, \quad \text{где}$$

$$R_{ij}^1 = \{u_{ij} \in R^4: \Phi_{ij}(u_{ij}) > 0\},$$

$$\begin{aligned}
R_{ij}^2 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, a_i > a_j, b_i < b_j, t = 1, \dots, 4\}, \\
R_{ij}^3 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 3, 4, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 2, 9\}, \\
R_{ij}^4 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 1, 2, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 8, 11\}, \\
R_{ij}^5 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 3, 4, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 5, 10\}, \\
R_{ij}^6 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 1, 2, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 7, 12\}, \\
R_{ij}^7 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 6, 8, 9, 11\}, \\
R_{ij}^8 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 6, 7, 9, 12\}, \\
R_{ij}^9 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 5, 7, 10, 12\}, \\
R_{ij}^{10} &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 5, 8, 10, 11\}, \\
R_{ij}^{11} &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, a_i < a_j, b_i < b_j, t = 1, \dots, 4\}, \\
R_{ij}^q &= \text{int } R_{ij}^q, \quad q = 1, 2(11), \quad R_{ij}^q = \text{cl } R_{ij}^q, \quad q = 7, 8, 9, 10, \\
R_{ij}^q &\neq \text{int } R_{ij}^q, \quad R_{ij}^q \neq \text{cl } R_{ij}^q, \quad q = 3, 4, 5, 6, \quad \text{в пространстве } R^4;
\end{aligned}$$

$$2) R^4 = \bigcup_{q=1,3,5,7,8,9,10} R_{ij}^q, \text{ если } a_i = a_j \text{ и } b_i \neq b_j, \text{ где}$$

$$\begin{aligned}
R_{ij}^1 &= \{u_{ij} \in R^4: \Phi_{ij}(u_{ij}) > 0\}, \\
R_{ij}^3 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 3, 4, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 2, 9\}, \\
R_{ij}^5 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 3, 4, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 5, 10\}, \\
R_{ij}^7 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 6, 8, 9, 11\}, \\
R_{ij}^8 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 9, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 6, 7, 12\}, \\
R_{ij}^9 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 5, 7, 10, 12\}, \\
R_{ij}^{10} &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 10, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 5, 8, 11\}, \\
R_{ij}^1 &= \text{int } R_{ij}^1, \quad R_{ij}^q = \text{cl } R_{ij}^q, \quad q = 7, 9, \\
R_{ij}^q &\neq \text{int } R_{ij}^q, \quad R_{ij}^q \neq \text{cl } R_{ij}^q, \quad q = 3, 5, 8, 10, \quad \text{в пространстве } R^4;
\end{aligned}$$

$$3) R^4 = \bigcup_{q=1,4,6,7,8,9,10} R_{ij}^q, \text{ если } a_i \neq a_j \text{ и } b_i = b_j, \text{ где}$$

$$\begin{aligned}
R_{ij}^1 &= \{u_{ij} \in R^4: \Phi_{ij}(u_{ij}) > 0\}, \\
R_{ij}^4 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 1, 2, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 8, 11\}, \\
R_{ij}^6 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 1, 2, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 7, 12\}, \\
R_{ij}^7 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 11, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 6, 8, 9\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{ij}^8 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 6, 7, 9, 12\}, \\
R_{ij}^9 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 12, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 5, 7, 10\}, \\
R_{ij}^{10} &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 5, 8, 10, 11\}, \\
R_{ij}^1 &= \text{int } R_{ij}^1, \quad R_{ij}^q = \text{cl } R_{ij}^q, \quad q = 8, 10, \\
R_{ij}^q &\neq \text{int } R_{ij}^q, \quad R_{ij}^q \neq \text{cl } R_{ij}^q, \quad q = 4, 6, 7, 9, \quad \text{в пространстве } R^4;
\end{aligned}$$

$$4) R^4 = \bigcup_{q=1,7,8,9,10} R_{ij}^q, \text{ если } a_i = a_j \text{ и } b_i = b_j, \text{ где}$$

$$\begin{aligned}
R_{ij}^1 &= \{u_{ij} \in R^4: \Phi_{ij}(u_{ij}) > 0\}, \\
R_{ij}^7 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 11, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 6, 8, 9\}, \\
R_{ij}^8 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 9, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 6, 7, 12\}, \\
R_{ij}^9 &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 12, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 5, 7, 10\}, \\
R_{ij}^{10} &= \{u_{ij} \in R^4: f_t(u_{ij}) > 0, t = 10, f_t(u_{ij}) \geq 0, t = 5, 8, 11\}, \\
R_{ij}^1 &= \text{int } R_{ij}^1, \\
R_{ij}^q &\neq \text{int } R_{ij}^q, \quad R_{ij}^q \neq \text{cl } R_{ij}^q, \quad q = 7, 8, 9, 10, \quad \text{в пространстве } R^4,
\end{aligned}$$

где в 1-4:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{ij}(u_{ij}) - \Phi\text{-функция } P_i(u_i) \text{ и } P_j(u_j) [4], \\
&f_1(u_{ij}) = -\Delta x_{ij} + \alpha_{ij}^2, f_2(u_{ij}) = \Delta x_{ij} + \alpha_{ij}^2, f_3(u_{ij}) = -\Delta y_{ij} + \beta_{ij}^2, \\
&f_4(u_{ij}) = \Delta y_{ij} + \beta_{ij}^2, f_5(u_{ij}) = -\Delta x_{ij} + \alpha_{ij}^1, f_6(u_{ij}) = \Delta x_{ij} + \alpha_{ij}^1, \\
&f_7(u_{ij}) = -\Delta y_{ij} + \beta_{ij}^1, f_8(u_{ij}) = \Delta y_{ij} + \beta_{ij}^1, f_9(u_{ij}) = -\Delta x_{ij} - \alpha_{ij}^2, \\
&f_{10}(u_{ij}) = \Delta x_{ij} - \alpha_{ij}^2, f_{11}(u_{ij}) = -\Delta y_{ij} - \beta_{ij}^2, f_{12}(u_{ij}) = \Delta y_{ij} - \beta_{ij}^2, \\
&\Delta x_{ij} = x_j - x_i, \quad \Delta y_{ij} = y_j - y_i, \\
&a_i + a_j = \alpha_{ij}^1, \quad |a_i - a_j| = \alpha_{ij}^2, \quad b_i + b_j = \beta_{ij}^1, \quad |b_i - b_j| = \beta_{ij}^2.
\end{aligned}$$

Теорема 5. Пусть выполняются условия теоремы 4, тогда для семейства прямоугольников $\Lambda(u)$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in R^{2n}$, разбиение пространства R^{2n} имеет вид

$$R^{2n} = \bigcup_{q=1}^{\eta} R_q^{2n}, \quad R_q^{2n} = \bigcap_{i>j=1}^n R_{ij}^q, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
\eta &= 10^{\sigma_1} \cdot 7^{\sigma_2} \cdot 5^{\sigma_3}, \quad \sigma = \sum_{l=1}^3 \sigma_l, \\
\sigma_l &\in \left\{ 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}n(n-1) \right\}, \quad l = 1, 2, 3, \quad \sigma = \frac{1}{2}n(n-1),
\end{aligned} \quad (5)$$

при этом

$$\eta = 10^\sigma, \quad \text{если } R^4 = \bigcup_{q=1, q \neq 2}^{11} R_{ij}^q \quad \text{или} \quad R^4 = \bigcup_{q=1}^{10} R_{ij}^q, \quad \forall i, j \in I_n, \quad i \neq j,$$

$$\eta = 7^\sigma, \quad \text{если } R^4 = \bigcup_{q=1, 3, 5, 7, 8, 9, 10} R_{ij}^q \quad \text{или} \quad R^4 = \bigcup_{q=1, 4, 6, 7, 8, 9, 10} R_{ij}^q, \quad \forall i, j \in I_n, \quad i \neq j,$$

$$\eta = 5^\sigma, \quad \text{если } R^4 = \bigcup_{q=1, 7, 8, 9, 10} R_{ij}^q, \quad \forall i, j \in I_n, \quad i \neq j.$$

Теорема 6. Пусть выполняются условия теорем 3–5 и Γ -функция [6] для семейства прямоугольников $\Lambda(u)$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in R^{2n}$, и Ω имеет вид

$$\Gamma(u) = \begin{cases} \Gamma_1(u), & \text{если } u \in R_1^{2n}, \\ \dots \\ \Gamma_q(u), & \text{если } u \in R_q^{2n}, \\ \dots \\ \Gamma_\eta(u), & \text{если } u \in R_\eta^{2n}, \end{cases} \quad (6)$$

где $\Gamma_q(u) = F_q(u, v)|_{v=0}$, $F_q(u, v)|_{u=\text{const}} = \Phi(0, v)$ — Φ -функция $H(0)$ и $\Omega(v)$ вида (1). Тогда справедлива оценка числа локальных максимумов Γ -функции (6)

$$\eta^* \leq \mu\eta,$$

где η определяется соотношением (5),

$$\mu = \prod_{k=1}^K ((0,5m_k + 3)^{4(n-3)} (m_k + 4)^{0,25(n-2)^2} \max\{108(m_k + 1)^3, (0,25m_k + 2)^8\}).$$

Приведенные результаты могут быть использованы при построении математических моделей двумерных задач покрытия и упаковки в виде задач математического программирования, что позволяет применить для решения NP-сложных задач этого класса современные методы локальной и глобальной оптимизации.

1. Daniels K., Inkulu R. An incremental algorithm for translational polygon covering // University of Massachusetts at Lowell Computer Science Technical Report. – 2001. – No 1. – P. 1–31.
2. Burke E., Heller R., Kendall G., Whitwell G. A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem // Operations research. – 2006. – 54, No 3. – P. 587–601.
3. Stoyan Yu. G. Φ -function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. – No 8. – С. 112–117.
4. Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G. et al. Φ -function for 2D primary objects // Studia Informatica. – 2002. – 2, No 1. – P. 1–32.
5. Stoyan Y., Scheithauer G., Gil M., Romanova T. Φ -function for complex 2D objects // 4OR Quarterly J. of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. – 2004. – 2, No 1. – P. 69–84.
6. Stoyan Y. Covering a polygonal region by a collection of various size rectangles // Пробл. машиностроения. – 2007. – 10, No 2. – С. 67–82.

Институт проблем машиностроения
и.м. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 19.03.2008