1. *Гузь А. Н.* К линеаризированной теории разрушения хрупких тел с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. – 1980. – **252**, № 5. – С. 1085–1088.
2. *Гузь А. Н.* Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4-х т., 5-ти кн. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 2).
3. *Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Назаренко В. М.* Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 456 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4-х т., 5-ти кн. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 4. Кн. 1).
4. *Guz A. N.* On the development of brittle-fracture mechanics of materials with initial stress // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**, No 4. – P. 316–323.
5. *Guz A. N., Dyshel' M. Sh., Nazarenko V. M.* Fracture and stability of materials and structural members with cracks: Approaches and results // Ibid. – 2004. – **40**, No 12. – P. 1323–1359.
6. *Guz A. N., Nazarenko V. M., Bogdanov V. L.* Fracture under initial stresses acting along cracks: Approach, concept and results // Theor. and Appl. Fracture Mech. – 2007. – **48**. – P. 285–303.
7. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977. – 220 с.
8. *Kassir M. K., Sih G. C.* Mechanics of fracture. Three dimensional crack problems. – Leyden: Noordhoff, 1975. – Vol. 2. – 452 p.
9. *Бартенев Г. М., Хазанович Т. Н.* О законе высокоэластических деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. – 1960. – **2**, № 1. – С. 21–28.
10. *Хай М. В., Лаушник И. П.* О взаимодействии периодической системы дискообразных трещин // Физико-механические поля в деформируемых средах. – Киев, 1978. – С. 65–73.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 16.04.2008

УДК 620.178.3

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко, В. Е. Корсун**

О моделировании спектральных характеристик смешанного процесса вибраций

The theory of forming a simulated vibration with the use of spectral functions and spectral moments of an additive medley of stochastic and polyharmonic vibrations is given.

Эксплуатационная вибрация транспортных объектов в большинстве случаев представляет собой совокупность стохастических и полигармонических механических колебаний [1–4]. Такую вибрацию назовем смешанной и она записывается выражением

$$z(t) = \xi(t) + x(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ — квазидетерминированный полигармонический вибропроцесс;

$$x_3 = \sum_{k=1}^{N} A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k), \qquad s = 1, 2; \tag{2}$$

ω_k — круговая частота; t — время; $\xi(t)$ — стационарный стохастический вибропроцесс (часто бывает нормальным).

В $x(t)$ начальные фазы φ_k, $k = \overline{1, N}$, могут быть также стохастическими. Выражение (1) отображает аддитивную смесь $\xi(t)$ и x(t). В лабораторных и производственных условиях при имитации эксплуатационных вибраций в качестве эквивалентных характеристик используются спектральные плотности мощности вибраций, спектральные функции и спектральные моменты. Это вызвано, например, заметным влиянием уровня дисперсии и формы спектральной плотности на вибропрочность и виброустойчивость эксплуатируемых изделий. Но из-за наличия в спектральной плотности разрывов второго рода, обусловленных присутствием в моделирующем процессе гармонических составляющих, как показано в работе [4], в критерии приближения целесообразно использовать спектральную функцию, являющуюся первообразной спектральной плотности. Эта функция $G(\omega)$ может служить параметром эквивалентирования моделирующих и моделируемых вибраций. Спектральная функция вибровоздействия (1) не имеет разрывов второго рода. За критерий приближения принимаем минимум среднеквадратичного отклонения спектральных функций эксплуатационных $G_z(\omega)$ и стендовых $G_y(\omega)$ вибраций [4]

$$\varepsilon_G = \frac{1}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} [G_z(\omega) - G_y(\omega)]^2 d\omega. \tag{3}$$

Будем рассматривать применение критерия (3) к указанным смесям. При этом запишем $G_y(\omega) = \int S_y(\omega)\, d\omega$, где $S_y(\omega)$ — спектральная плотность $y(t)$; $G_y(\omega)$ — спектральная функция $y(t)$;

$$G_x(\omega) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k^2}{2} \eta(\omega - \omega_k),$$

где

$$\eta(\cdot) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & (\cdot) \geqslant 0 \\ 0, & (\cdot) < 0 \end{array} \right\} - \tag{4}$$

спектральная функция процесса (2).

Для аддитивной смеси

$$G_y(\omega) = G_x(\omega) + G_\xi(\omega), \tag{5}$$

где

$$G_\xi(\omega) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{при} & \omega < \omega_{\min}, \quad \omega > \omega_{\max} \\ C\omega & \text{при} & \omega_{\min} \leqslant \omega \leqslant \omega_{\max} \end{array} \right\}. \tag{6}$$

Выражение (6) отображает спектральную функцию “белого шума”, спектральная плотность которого

$$S_\xi(\omega) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{при} & \omega < \omega_{\min}, \quad \omega > \omega_{\max} \\ C & \text{при} & \omega_{\min} \leqslant \omega \leqslant \omega_{\max} \end{array} \right\}. \tag{7}$$

Здесь C — уровень (интенсивность) "белого шума"; $\omega_{\min} - \omega_{\max}$ — частотный диапазон "белого шума" (ω — круговая частота $\omega = 2\pi f$; f — частота, Гц).

Перепишем (3) с учетом (4) и (5)

$$\varepsilon_G(\omega_1 Dk) = \frac{1}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} \sum_{n=0}^{N} \int\limits_{\Psi_n(\omega_1)}^{\Psi_{n+1}(\omega_1)} [G_z(\omega) - P_n(D_k) - Q(D_k)(\omega - \omega_{\min})]^2 d\omega, \qquad (8)$$

где

$$P_n(D_k) = \sum_{k=1}^{n} D_k; \qquad Q(D_k) = \frac{\sigma_\xi^2}{(\omega_{\max} - \omega_{\min})};$$

$$\Psi_n(\omega) = n\omega_1, \qquad n = \overline{1, N}; \qquad \Psi_{n+1} = \omega_{\max}; \qquad D_k \text{ — дисперсии амплитуд } x(t).$$

Для выполнения условия нормировки смешанного вибропроцесса одну из переменных σ_ξ положим зависимой от остальных, т. е.

$$\sigma_\xi^2 = 1 - \sum_{k=1}^{N} D_k. \qquad (9)$$

В дальнейших выкладках аргументы D_k функций $P_n(D_k), Q(D_k)$, а также аргумент ω_1 функции $\Psi_n(\omega_1)$ опускаем. Необходимое условие экстремума функции (8)

$$\frac{\partial \varepsilon_G(\omega_1, D_k)}{\partial \omega_1} = 0, \qquad \frac{\partial \varepsilon_G(\omega_1, D_k)}{\partial D_k} = 0 \qquad (10)$$

приводит к системе, включающей уравнение

$$\sum_{n=1}^{N} n(P_n - P_{n-1}) \left[G_z(n\omega_1) - (n\omega_1 - \omega_{\min})Q - \frac{1}{2}(P_n + P_{n-1}) \right] = 0 \qquad (11)$$

и еще N уравнений, каждое из которых получается при подстановке различных значений индекса m от 0 до $N-1$ в формулу

$$\sum_{n=0}^{m} \int\limits_{\Psi_n}^{\Psi_{n=1}} [G_z(\omega) - (\omega - \omega_{\min})Q - P_n](\omega - \omega_{\min})\, d\omega -$$

$$- \sum_{n=m+1}^{N} \int\limits_{\Psi_n}^{\Psi_{n+1}} [G_z(\omega) - (\omega - \omega_{\min})Q - P_n](\omega - \omega_{\max})\, d\omega = 0, \quad m = \overline{0, N-1}. \qquad (12)$$

Вычитая из второго уравнения вида (12) первое, из третьего — второе и т. д. до последнего N-го уравнения, получаем

$$\int\limits_{n\omega_1}^{(n+1)\omega_1} [G_z(\omega) - (\omega - \omega_{\min})Q - P_n]\, d\omega = 0, \qquad n = \overline{1, N-1}, \qquad (13)$$

откуда

$$P_n = \frac{1}{\omega_1} \int\limits_{n\omega_1}^{(n+1)\omega_1} [G_z(\omega) - (\omega - \omega_{\min})Q]\, d\omega, \qquad n = \overline{1, N-1}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в последнее из уравнений (13) и учитывая (8), получаем выражение

$$Q = \left[\sum_{n=0}^{N} \Psi_n \int\limits_{\Psi_n}^{\Psi_{n+1}} G_z(\omega)\, d\omega + \frac{1}{2}\omega_1 \int\limits_{\omega_1}^{N\omega_1} G_z(\omega)\, d\omega + \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} G_z(\omega)\, d\omega - \frac{1}{2}(\omega_{\max} - N\omega_1)\right] \times$$
$$\times \left\{\sum_{n=1}^{N-1} (2n+1)\frac{\omega_1^2}{2}\left[(2n+1)\frac{\omega_1}{2} - \omega_{\min}\right] - \frac{1}{3}(\omega_{\max}^3 - \omega_{\min}^3) - \right.$$
$$\left. - \omega_1(\omega_{\min}^2 - N\omega_{\max}^2) - \omega_1^2\left[\omega_{\max}N^2 - \frac{1}{2}\omega_{\min}(1+N^2)\right]\right\}^{-1}. \tag{15}$$

Используя формулы (14), (15), удовлетворяем всем уравнениям (13), исключая при этом в уравнении (11) функции P_n и Q, зависящие от варьируемых переменных D_k $(k = \overline{1, N})$.

Таким образом, необходимые условия (10) экстремума погрешности (8) ε_G приближения по спектральной функции, представляющие собой систему из $N + 1$ уравнений (10) и (12), сведены к одному нелинейному уравнению

$$\sum_{n=1}^{N} n[P_n(\omega_1) - P_{n-1}(\omega_1)][2G_z(n\omega_1) - P_{n-1}(\omega_1) - P_n(\omega_1) - 2Q(\omega_1)(n\omega_1 - \omega_{\min})] = 0 \tag{16}$$

относительно основной частоты ω_1 периодических полигармонических колебаний $x(t)$, содержащихся в смешанном стендовом вибровоздействии $y(t)$. Из уравнения (16), решая его численным методом, находим его корни ω_i, для каждого из которых по формуле (14) вычисляются параметры P_n, а по ним — соответствующие дисперсии $D_{k,i} = P_{k,i} - P_{k-1,i}$ $(k = \overline{1, N})$ амплитуд гармоник $x(t)$. Дисперсию вибрационного шума σ_ξ^2 находим по формуле (9). Для определения из полученных наборов параметров ω_i, $D_{k,i}$ $(k = \overline{1, N})$ того, который обеспечивает для погрешности ε_G (7) наименьший минимум, необходимо подставить их в формулу (3) и из полученных значений погрешности ε_{Gi} выбрать наименьшее ε_G^*. Соответствующие ему величины ω_i^*, D_k^* $(k = \overline{1, N})$ принимаются в качестве параметров смешанного вибровоздействия, воспроизводимого в стендовых испытаниях. Нормированные амплитуды полигармонических колебаний A_k, $k = \overline{1, N}$, определяются через дисперсии D_k по формуле $A_k = \sqrt{2D_k}$, $k = \overline{1, N}$.

Наряду с эквивалентированием указанных вибропроцессов по минимуму погрешности в спектральных функциях представляет интерес использование в качестве параметров эквивалентирования числовых характеристик спектра мощности — спектральных моментов

$$\lambda_l = \int\limits_0^\infty S(\omega)\omega^l d\omega \qquad (l = 1, 2, \ldots), \tag{17}$$

вводимых по аналогии с моментами одномерного распределения вероятностей. В качестве критерия приближения по спектральным моментам можно воспользоваться равенством

$$\lambda_l^y = \lambda_l^z, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{18}$$

нескольких первых спектральных моментов формируемого и эксплуатационного процессов. Подавая на вход испытательного вибростенда сигнал в виде (1) со спектральной плотностью стохастической составляющей $\xi(t)$ в виде (7), получаем в контрольной точке стенда колебания такого же вида, но со спектральной плотностью

$$S_y(\omega) = C|H_C(i\omega)|^2 + |H_C(i\omega)|^2 \sum_{k=1}^{N} D_k^x \delta(\omega - \omega_k), \tag{19}$$

где $H_C(i\omega)$ — передаточная функция стенда, $i = \sqrt{-1}$.

Подставляя (19) в (17), перепишем (18) следующим образом:

$$C \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \omega^l |H_C(i\omega)|^2 d\omega + \sum_{k=1}^{N} D_k^{\delta} (k\omega_1)^l = \lambda_l^z, \quad l = \overline{0, N+1}, \quad D_k = D_k^x |H_C(i\omega)|^2. \tag{20}$$

Введя обозначения

$$a_l = \frac{1}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \omega^l |H_C(i\omega)|^2 d\omega,$$

$$b_{sk} = (k\omega_1)^l |H_C(i\omega_1 k)|^2, \qquad l = \overline{0, N+1}; \qquad k = 1, 2, \ldots; \qquad s = l + 1,$$

запишем (20) в виде

$$\sum_{k=1}^{N} b_{sk} D_k^x = \lambda_l^z - a_l D_{\xi}.$$

Полученная система $N + 2$ уравнений может быть приведена к одному нелинейному уравнению, относительно основной частоты ω_1 полигармонического процесса $x(t)$

$$\sum_{n=0}^{N} a_{2N+2,n+1} D_{n+1}^{\xi}(\omega_1) + \sum_{n=0}^{N} b_{2N+2,k} D_k^x(\omega_1) = \lambda_{2N+1}^z, \tag{21}$$

где $D_n^{\xi}(\omega_1)$, $D_k^x(\omega_1)$ — дисперсии, которые определяются как корни системы линейных уравнений

$$\sum_{n=0}^{N} a_{l+1,n+1} D_{n+1}^{\xi}(\omega_1) + \sum_{k=1}^{N} b_{b+1} D_k^x = \lambda_l^z, \qquad l = \overline{0, 2N},$$

при фиксированном ω_1.

Полученное уравнение (21) может быть разрешено численно. При этом отыскиваются только положительные значения ω_1, D_n^{ξ} $(n = \overline{0, N})$, D_k^x $(k = \overline{1, N})$, которые и принимаются в качестве параметров моделирующего процесса $y(t)$. Если $x(t) = 0$, то $y(t) = \xi(t)$ и имитация эксплуатационных вибраций на вибростенде осуществляется нормальным стохастическим процессом с постоянной спектральной плотностью $S_\xi(\omega) = C$. При этом система уравнений, соответствующая (20), будет иметь вид

$$C \int\limits_{\Psi_n}^{\Psi_{n+1}} \omega^l |H_C(i\omega)|^2 d\omega = \lambda_l^z, \qquad l = \overline{0, N+1}. \tag{22}$$

Если $\Psi_{n+1} = (n+1)\omega_1$, то (22) переписывается следующим образом:

$$C \int\limits_{n\omega_1}^{(n+1)\omega_1} \omega^l |H(i\omega)|^2 d\omega = \lambda_l^z. \tag{23}$$

Решая уравнения (22) и (23), можно найти ширину полосы частот, пропускающую формирующими фильтрами, при которой разность спектральных моментов $(\lambda_l^z - \lambda_l^y)$ будет минимальной. В этом случае интенсивность стохастического процесса $\xi_y(t)$ $C^y = D_n^\xi/(\Psi_{n+1} - \Psi_n)$ будет на выходе фильтра.

Если $\xi(t) = 0$, то $y(t) = x(t)$ и

$$\sum_{k=1}^{N} D_k (k\omega_1)^l = \lambda_l^z, \qquad l = \overline{0, N}. \tag{24}$$

Решая систему (24), определяем D_k гармонических составляющих и основную частоту ω_1. Дисперсия $D_k = |H_C(ik\omega_1)|^2 D_k^x$.

Таким образом, использование в качестве критерия приближения моделирующего вибропроцесса к эксплуатационному равенств (3) и (18) позволяет решать задачу формирования моделирующего процесса с заданными спектральными характеристиками.

1. *Коловский М. З.* О замене случайных вибрационных воздействий полигармоническим процессом // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 2. – С. 93–101.
2. *Божко А. Е., Штейнвольф А. Л.* Воспроизведение полигармонических вибраций при стендовых испытаниях. – Киев: Наук. думка, 1984. – 167 с.
3. *Божко А. Е.* Воспроизведение случайных вибраций. – Киев: Наук. думка, 1984. – 216 с.
4. *Штейнвольф А. Л.* Расчеты и имитация негауссовских случайных вибраций. – Киев: Наук. думка, 1993. – 252 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 30.07.2007