УДК 536

О. І. Двірний, І. Л. Іванов

Достатні умови стійкості лінійних імпульсних систем змінної структури

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. А. Мартинюком)

The asymptotic stability of a solution of the linear system with structural perturbation is studied. An application of the obtained results is illustrated.

Розглянемо лінійну систему з імпульсною дією вигляду

$$
\begin{aligned}
&\frac{du(t)}{dt} = P_{\sigma(t)}u(t), \qquad u(t_0) = u_0, \qquad t \neq \tau_k,\\
&u(t^+) = Q_{\sigma(t)}u(t), \qquad t = \tau_k,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де $u \in K \subset \mathbb{R}^n$ — вектор стану системи; $u(t^+)$ — значення функції $u(t)$ справа; $\sigma(t)$ — кусково-стала функція з цілими значеннями. Нехай $\mathcal{S}_1$ і $\mathcal{S}_2$ — деякі скінченні або нескінченні множини матриць, причому $P_{\sigma(t)} \in \mathcal{S}_1$, $Q_{\sigma(t)} \in \mathcal{S}_2$. Ці множини називаються структурними множинами системи (1), а сама система (1) називається системою зі змінною структурою.

Розглянемо задачу про стійкість лінійної системи змінної структури (1), виходячи з таких додаткових припущень:

1) елементи множини $\mathcal{S}_1$ — квазімонотонні матриці відносно конуса K;

2) елементи множини $\mathcal{S}_2$ — монотонні матриці відносно конуса K;

3) моменти імпульсної дії $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняють нерівність

$$0 < \theta_1 < \tau_{k+1} - \tau_k < \theta_2 < \infty;$$

4) множини $\mathcal{S}_1$ і $\mathcal{S}_2$ скінченні, інтервали $[\tau_k, \tau_{k+1})$ є інтервалами сталості функції $\sigma(t)$, послідовності матриць P_k, Q_k є s-періодичними.

Означення 1. Множина $K \subset \mathbb{R}^n$ називається (тілесним) конусом, якщо вона задовольняє такі умови:

1) якщо $u \in K$, $\lambda \geqslant 0$, то $\lambda u \in K$; якщо $u \in K$, $v \in K$, то $u + v \in K$;

2) якщо $u \in K$, $-u \in K$, то $u = 0$;

3) $K^0 \neq \varnothing$, $\overline{K} = K$.

Крім того, введемо спряжений з K конус

$K^\star \subset \mathbb{R}$, $K^\star = \{\varphi\colon (\varphi, u) \geqslant 0$ при всіх $u \in K\}$.

Відомо [1, 3], що $K^{\star\star} = K$.

Означення 2 [3, 4]. Лінійний оператор Q називається позитивним відносно конуса K, якщо з умови $u \in K$ випливає, що $Q(u) \in K$.

Означення 3 [3, 4]. Лінійний оператор P називається квазімонотонним відносно конуса K, якщо з умови $u \in K$ і $(\varphi, u) = 0$ при деякому $\varphi \in K^\star$ випливає, що $(\varphi, P(u)) \geqslant 0$.

Означення 4 [5]. Система (1) називається позитивною відносно конуса K, якщо з умови $u(t_0) = u_0 \in K$ випливає, що $u(t) \in K$ при всіх $t \geqslant t_0$.

Означення 5 [5]. Розв'язок $u = 0$ системи (1) називається стійким відносно конуса K, якщо для всіх $t_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon, t_0)$ таке, що з умови $u_0 \in K_\delta \bigcap K$ випливає, що $u(t) \in K_\varepsilon \bigcap K$ при всіх $t \geqslant t_0$. Якщо, крім того, $u(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то розв'язок $u = 0$ називається асимптотично стійким відносно конуса K.

Надалі розглянемо випадок, коли K є прямим добутком скінченного числа напівпрямих.

Нехай $S \subset K$ — довільна підмножина конуса K. Під лінійною комбінацією елементів з S будемо розуміти суму $\sum\limits_{x \in S} a_x x$, $a_x \geqslant 0$, $\{a_x\}$ — множина невід'ємних чисел з $\mathbb{R}$, майже всі з яких дорівнюють нулю.

Нехай $K(S)$ — замикання множини всіх таких лінійних комбінацій. Тоді $K(S)$ — конус в $\mathbb{R}^n$ і $K(S) \subset K$.

Множина τ, для якої $K(\tau) \subset K$, називається системою твірних конуса K. Множина τ скінченна, оскільки конус K є прямим добутком скінченного числа напівпрямих. Позначимо $\tau^\star$ систему твірних конуса $K^\star$. Множина $\tau^\star$ скінченна, якщо існує скінченна множина τ.

Введемо множину $M \subset \tau^\star \times \tau$

$$M = \{(\varphi, u)\colon (\varphi, u) \in \tau^\star \times \tau, (\varphi, u) \neq 0\}$$

і постійні

$$\beta_i = \begin{cases} \min\limits_{M} \dfrac{(\varphi, P_i u)}{(\varphi, u)}, & \text{якщо існує} \quad (\varphi_0, u_0) \in M, \quad (\varphi_0, P_i u_0) < 0; \\ 0, & \text{якщо при всіх} \quad (\varphi_0, u_0) \in M, \quad (\varphi_0, P_i u_0) \geqslant 0. \end{cases}$$

Лема [6]. *Якщо оператор P_i квазімонотонний відносно конуса K, то оператор $P_i' = P_i - \beta_i I$, де I — одиничний оператор, монотонний відносно конуса K.*

Введемо матрицю B, яка є аналогом матриці Флоке для системи (1)

$$B = (e^{(P_{s+1}\theta_2 + \beta_{s+1}(\theta_1 - \theta_2)I} Q_s \cdot \dots \cdot e^{(P_2\theta_2 + \beta_2(\theta_1 - \theta_2)I} Q_1).$$

Тоді умови асимптотичної стійкості можна сформулювати у вигляді такого твердження.

Теорема. *Нехай система* (1) *така, що виконуються всі умови припущення і, крім того,*

$$\rho(B) < 1$$

та стан рівноваги (1) *асимтотично стійкий.*

Доведення. Відомо [7], що розв'язок системи (1) може бути поданий у вигляді

$$u(t) = \Omega_t^{t_0} u_0, t \geqslant 0, \tag{2}$$

де $\Omega_t^{t_0}$ — матрицант системи. Припустимо, що $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = ms + r$, $0 \leqslant r < s$, тоді матрицант системи (1) можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} \Omega_t^{t_0} &= e^{P_{k+1}(t - \tau_k)} Q_{k+1} e^{P_k(\tau_k - \tau_{k-1})} Q_k \cdots e^{P_2(\tau_2 - \tau_1)} Q_1 e^{P_1(\tau_1 - t_0)} = \\ &= e^{P_{k+1}(t - \tau_k)} Q_{k+1} e^{(P_k' + \beta_k I)(\tau_k - \tau_{k-1})} Q_k \cdots Q_1 e^{(P_1' + \beta_1 I)(\tau_1 - t_0)} = \\ &= e^{P_{k+1}(t - \tau_k)} Q_{k+1} e^{(P_k' + \beta_k I)(\tau_k - \tau_{k-1})} Q_{k-1} \cdots e^{(P_{s+1} + \beta_k I)(\tau_{s+1} - \tau_s)} Q_s (e^{(P_s' + \beta_s I)(\tau_s - \tau_{s-1})} \dots \\ &\quad \dots e^{(P_2' + \beta_2 I)(\tau_2 - \tau_1)} Q_1 e^{P_1(\tau_1 - t_0)} \leqslant e^{P_{k+1}(t - \tau_k)} Q_{k+1} e^{P_k\theta_2 + \beta_k(\theta_1 - \theta_2)I} Q_{k-1} \cdots \end{aligned}$$

$$\dots e^{P_{ms+2}\theta_2+\beta_{ms+2}(\theta_1-\theta_2)I}Q_{ms+1}(e^{(P_{s+1}\theta_2+\beta_{s+1}(\theta_1-\theta_2)I}Q_s\dots$$
$$\dots e^{(P_2\theta_2+\beta_2(\theta_1-\theta_2)I}Q_1)^m e^{P_1(\tau_1-t_0)}.$$

Враховуючи умову теореми та замкненість K, переходячи до границі в (2) при $t\to\infty$, прийдемо до висновку, що $u(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Звідки випливає асимптотична стійкість розв'язку $u=0$ системи (1). Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо лінійну систему зі структурними збуреннями

$$\begin{aligned}&\frac{du}{dt}=P_iu, \qquad t\neq\tau_i,\\ &u(t^+)=Q_iu(t), \qquad t=\tau_i,\end{aligned}\tag{3}$$

де u — вектор стану системи, оператори P_i, Q_i періодичні з періодом 3, $P_i=P_{i+3}$, $Q_i=Q_{i+3}$, $i=1,2,\dots$.

$$P_1=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}1\\ 0{,}5 & 0{,}1\end{pmatrix}, \qquad P_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad P_3=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}09\\ 0{,}1 & 0{,}01\end{pmatrix},$$
$$Q_1=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}05\\ 0{,}2 & 1\end{pmatrix}, \qquad Q_2=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}05\\ 0{,}05 & 0{,}01\end{pmatrix}, \qquad Q_3=\begin{pmatrix}1 & 0{,}3\\ 1 & 0{,}02\end{pmatrix}, \qquad 0{,}9\leqslant\tau_{i+1}-\tau_i\leqslant 1{,}1.$$

Стан рівноваги $u=0$ системи (3) асимптотично стійкий, оскільки для цієї системи $\rho(B)=0{,}92$.

Відзначимо, що відомі умови стійкості [8] не дозволяють встановити умови стійкості стану рівноваги системи (3), оскільки максимальна дійсна частина власних значень матриці A_2 неперервної компоненти дорівнює 2,4, а спектральний радіус матриці B_3 дискретної компоненти — 1,24. Таким чином, запропонований підхід дозволяє встановити умови асимптотичної стійкості стану рівноваги лінійної системи зі структурними збуреннями, коли матриці неперервної та дискретної компоненти системи можуть мати спектральні радіуси більші 2 та більші 1 відповідно.

1. *Красносельський М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. – Москва: Наука, 1985. – 256 с.
2. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 1 (2, 3). – С. 3–95.
3. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 244 с.
4. *Оболенский А. Ю.* Об устойчивости решений систем сравнения // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – № 8. – С. 604–611.
5. *Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю.* Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. – 1980. – № 8. – С. 1392–1407.
6. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Об устойчивости линейных импульсных систем относительно конуса // Доп. НАН України. – 2004. – № 4. – С. 42–48.
7. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
8. *Гладилика Р. И., Гладилика А. А.* Об устойчивости импульсных систем с переключателями // Тез. докл. Восьмой Крымской междунар. математ. школы «Метод функций Ляпунова и его приложения». – Алушта, 2006. – 45 с.

Академія пожежної безпеки ім. Героїв Чорнобиля, Черкаси

Надійшло до редакції 21.01.2008