Дійсно, якщо автоморфізми α, $\beta \in F\,\mathrm{Aut}\,T_2$ спряжені в $F\,\mathrm{Aut}\,T_2$, то автоморфізми α^p та β^p скінченностанові одночасно для всіх $p \in Z_2$. Згідно з теоремою (2), ця умова не є достатньою. Далі, без обмеження загальності можна вважати $b \neq a^n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq \pm 1$).

Функція $\log_a((a-1)x+1)$ є бієкцією $Z_2 \to Z_2$, як обернена до $a^{\widehat{x}}$ при $a = 4k+1$, $k \in Z_2$. Має місце рівність

$$(ax+1)^t = \left(a^t x + a^{\widehat{t}}\right) \qquad (t \in Z_2). \tag{8}$$

За теоремою Діріхле про наявність простих чисел в арифметичній прогресії, існує $x \in \mathbb{Z}$ таке, що $c = (a-1)x+1$ є простим числом, якого немає в розкладі a та b. Тоді, згідно з лемою 3 та формулою (8), маємо $(ax+1)^{\log_a c} \in F\,\mathrm{Aut}\,T_2$, оскільки $a^{\log_a c} = c$ є раціональним числом, а $(bx+1)^{\log_a c}$ не належить $F\,\mathrm{Aut}\,T_2$, оскільки $b^{\log_a c}$ не є раціональним числом. Враховуючи теорему (2), отримуємо твердження теореми.

Робота частково підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень (Ф 25/546–2007 № ДР 0107U010 499) та Міжнародним благодійним фондом відродження Києво-Могилянської академії.

1. *Сущанский В. И.* Группы изометрий p-пространства Бэра // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 8. – С. 28–30.
2. *Сущанский В. И.* Сплетения по последовательности груп подстановок и финитно-апроксимируемые группы // Докл. АН СССР. – 1984. – № 2. – С. 19–22.
3. *Боднарчук Ю. В., Морозов Д. І.* Будова централізаторів елементів максимального про-порядку в групі автоморфізмів бінарного дерева // Наук. зап. НаУКМА. Фіз.-мат. науки. – 2005. – **39**. – С. 25–27.
4. *Боднарчук Ю. В., Морозов Д. І.* Розширені 2-адичні числа як централізатори автоморфізмів регулярного кореневого дерева валентності 3 // Там само. – 2006. – **51**. – С. 4–7.

Національний університет "Києво-Могилянська академія"
Надійшло до редакції 25.02.2008

УДК 517.962.24:519.21

Н. В. Брадул

Об устойчивости разностного аналога математической модели "хищник-жертва" при случайных возмущениях

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)

A discrete analog of the mathematical predator-prey model is considered. The sufficient conditions on the discretization step for which the considered discrete analog saves the stability property of the initial model are obtained.

Математические модели типа "хищник-жертва" и их разностные аналоги исследуются во многих работах (см., напр., [1] и приведенную там библиогр.). Одной из важнейших задач этих исследований является задача устойчивости положительной точки равновесия таких систем. В связи с проблемами численного анализа особый интерес представляет способность разностного аналога исследуемой системы сохранять это свойство устойчивости.

В работе рассматривается устойчивость по вероятности положительной точки равновесия математической модели типа “хищник-жертва” при случайных возмущениях, которая описывается системой стохастических нелинейных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = x_1(t)(a - a_1x_1(t) - a_2x_2(t)) + \sigma_1(x_1(t) - x_1^*)\dot{w}_1(t),\\
&\dot{x}_2(t) = -bx_2(t) + b_1x_1(t-h_1)x_2(t-h_2) + \sigma_2(x_2(t) - x_2^*)\dot{w}_2(t),
\end{aligned} \tag{1}
$$

с начальным условием $x_m(s) = \varphi_m(s)$, $s \in [-h_m, 0]$, $m = 1, 2$. Здесь $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — плотности популяций жертвы и хищника соответственно; a, a_1, a_2, b, b_1 — положительные постоянные; h_1 и h_2 — неотрицательные запаздывания; σ_1, σ_2 — произвольные постоянные; $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — независимые между собой винеровские процессы, определенные на некотором вероятностном пространстве; $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ — непрерывные функции. Предполагается, что система (1) имеет положительную точку равновесия, т. е. постоянное решение $(x_1(t), x_2(t)) = (x_1^*, x_2^*)$ такое, что $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$. Случайные возмущения типа белого шума прямо пропорциональны отклонению текущего состояния системы $(x_1(t), x_2(t))$ от точки равновесия (x_1^*, x_2^*). Получены достаточные условия на шаг дискретизации, при которых разностный аналог системы (1) сохраняет свойство устойчивости точки равновесия.

Основные определения, вспомогательные утверждения. Точка равновесия (x_1^*, x_2^*) системы (1) определяется условиями $\dot{x}_1(t) \equiv 0$, $\dot{x}_2(t) \equiv 0$, имеет вид

$$
x_1^* = \frac{b}{b_1}, \qquad x_2^* = \frac{A}{a_2}, \qquad A = a - \frac{a_1 b}{b_1} \tag{2}
$$

и положительна при $A > 0$. Центрируя систему (1) относительно точки равновесия (x_1^*, x_2^*), введем новые переменные $y_1(t) = x_1(t) - x_1^*$, $y_2(t) = x_2(t) - x_2^*$. Система (1) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{y}_1(t) = -(y_1(t) + x_1^*)(a_1y_1(t) + a_2y_2(t)) + \sigma_1y_1(t)\dot{w}_1(t),\\
&\dot{y}_2(t) = -by_2(t) + b_1(x_2^*y_1(t-h_1) + x_1^*y_2(t-h_2) + y_1(t-h_1)y_2(t-h_2)) + \sigma_2y_2(t)\dot{w}_2(t).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Очевидно, что устойчивость точки равновесия (x_1^*, x_2^*) системы (1) эквивалентна устойчивости тривиального решения системы (3). Выделяя в (3) линейную часть, получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot{z}_1(t) = -x_1^*(a_1z_1(t) + a_2z_2(t)) + \sigma_1z_1(t)\dot{w}_1(t),\\
&\dot{z}_2(t) = -bz_2(t) + b_1(x_2^*z_1(t-h_1) + x_1^*z_2(t-h_2)) + \sigma_2z_2(t)\dot{w}_2(t).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Пусть $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$, $z(t) = (z_1(t), z_2(t))$, $\varphi(s) = (\varphi_1(s), \varphi_2(s))$.

Определение 1. Тривиальное решение системы (3) называется устойчивым по вероятности, если для любых $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что решение $y(t) = y(t, \varphi)$ удовлетворяет условию $\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{t \geqslant 0} |y(t, \varphi)| > \varepsilon_1\Big\} < \varepsilon_2$ для любой начальной функции φ такой, что $\mathbf{P}\Big\{\sup\limits_{s \leqslant 0} |\varphi(s)| < \delta\Big\} = 1$.

Определение 2. Тривиальное решение системы (4) называется устойчивым в среднем квадратическом, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что решение $z(t) = z(t, \varphi)$ удовлетворяет условию $\mathbf{M}|z(t, \varphi)|^2 < \varepsilon$ для любой начальной функции φ такой, что $\sup\limits_{s \leqslant 0} \mathbf{M}|\varphi(s)|^2 < \delta$. Если, кроме того, $\lim\limits_{t \to \infty} \mathbf{M}|z(t, \varphi)|^2 = 0$ для любой начальной функции φ, то тривиальное решение системы (4) называется асимптотически устойчивым в среднем квадратическом.

Пусть

$$A_1 = \frac{a_2^2 b \sigma_2^2}{A b_1^2}, \qquad A_2 = 2b\left(\frac{a_1}{b_1} - A h_1\right) - \sigma_1^2, \qquad A_3 = \frac{2Ab_1}{a_2},$$
$$A_4 = \frac{a_2 b}{b_1}\left(2(1 - b h_2) - \frac{a_1 \sigma_2^2}{A b_1}\right), \qquad B_1 = \frac{a_2 b^2}{b_1} h_2, \qquad B_2 = A b h_1.$$

Как показано в [2, пример 6.1], если выполняются условия

$$\begin{gathered} A > 0, \qquad A_2 > 0, \qquad A_4 > 0, \\ \left(\sqrt{B_1^2 + A_1 A_2} + B_1\right)\left(\sqrt{B_2^2 + A_3 A_4} + B_2\right) < A_2 A_4, \end{gathered} \tag{5}$$

то тривиальное решение системы (4) асимптотически устойчиво в среднем квадратическом, а тривиальное решение системы (3) устойчиво по вероятности.

Устойчивость разностного аналога. Рассмотрим разностные аналоги систем (1) и (4):

$$\begin{gathered} x_1(i+1) = x_1(i) + \Delta x_1(i)(a - a_1 x_1(i) - a_2 x_2(i)) + \sqrt{\Delta}\sigma_1(x_1(i) - x_1^*)\xi_1(i+1), \\ x_2(i+1) = (1 - \Delta b) x_2(i) + \Delta b_1 x_1(i - k_1) x_2(i - k_2) + \sqrt{\Delta}\sigma_2(x_2(i) - x_2^*)\xi_2(i+1), \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} z_1(i+1) = (1 - \Delta a_1 x_1^*) z_1(i) - \Delta a_2 x_1^* z_2(i) + \sqrt{\Delta}\sigma_1 z_1(i)\xi_1(i+1), \\ z_2(i+1) = (1 - \Delta b) z_2(i) + \Delta b_1(x_2^* z_1(i - k_1) + x_1^* z_2(i - k_2)) + \sqrt{\Delta}\sigma_2 z_2(i)\xi_2(i+1). \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $k_m = h_m/\Delta$ — целое; Δ — выбираемый шаг дискретизации; $x_m(i) = x_m(t_i)$; $t_i = i\Delta$; $\xi_m(i+1) = (w_m(t_{i+1}) - w_m(t_i))/\sqrt{\Delta}$, $i \in Z = \{0, 1, \ldots\}$; начальное условие имеет вид $x_m(j) = \varphi_m(j)$, $j \in \{-k_m, -k_m + 1, \ldots, 0\}$, $m = 1, 2$. Отметим, что $\xi_1(i)$ и $\xi_2(i)$, $i \in Z$, — независимые между собой последовательности взаимно независимых случайных величин таких, что $\mathbf{M}\xi_m(i) = 0$, $\mathbf{M}\xi_m^2(i) = 1$, $\mathbf{M}$ — знак математического ожидания.

Определения устойчивости для разностных уравнений аналогичны определениям 1, 2.

В [3, теорема 1] показано, что если порядок нелинейности по x больше 1, то достаточное условие асимптотической устойчивости в среднем квадратическом тривиального решения линейной части рассматриваемой нелинейной системы обеспечивает устойчивость по вероятности положительной точки равновесия исходной нелинейной системы.

Для получения достаточных условий асимптотической устойчивости в среднем квадратическом тривиального решения системы (7) построим соответствующий функционал Ляпунова. Следуя общему методу построения функционалов Ляпунова [4] и используя (2), представим второе уравнение системы (7) в виде

$$Z_2(i+1) = \Delta b_1 x_2^* z_1(i) + Z_2(i) + \sqrt{\Delta}\sigma_2 z_2(i)\xi_2(i+1),$$

где

$$Z_2(i) = z_2(i) + \Delta b_1(x_2^* F_1(i) + x_1^* F_2(i)), \qquad F_m(i) = \sum_{j=1}^{k_m} z_m(i - j), \qquad m = 1, 2.$$

Функционал Ляпунова $V(i)$ строится в виде

$$V(i) = V_1(i) + V_2(i),$$

где

$$V_1(i) = z_1^2(i) + 2\mu z_1(i)Z_2(i) + \gamma Z_2^2(i), \quad V_2(i) = \Delta^2 \sum_{m=1}^{2} q_m \sum_{j=1}^{k_m} (k_m - j + 1) z_m^2(i-j),$$
$$q_1 = b_1[x_2^*|\gamma b_1 x_2^* - \mu a_1 x_1^*| + \gamma_2^{-1}\mu A x_1^*], \quad q_2 = b[\gamma_1|\gamma b_1 x_2^* - \mu a_1 x_1^*| + \mu a_2 x_1^*], \tag{8}$$
$$\gamma > \mu^2, \qquad \gamma_1 > 0, \qquad \gamma_2 > 0.$$

Показано, что $\mathbf{M}\overline{\Delta}V(i) \leqslant \mathbf{M}z'(i)Rz(i)$, где $\overline{\Delta}V(i) = V(i+1) - V(i)$, $z(i) = (z_1(i), z_2(i))'$, R — симметричная матрица с элементами

$$r_{11} = \Delta[-a_1 x_1^*(2 - \Delta a_1 x_1^*) + \sigma_1^2 + 2\mu b_1 x_2^*(1 - \Delta a_1 x_1^*) + \gamma \Delta b_1^2 (x_2^*)^2 +$$
$$+ b_1|\gamma b_1 x_2^* - \mu a_1 x_1^*|(2x_2^* h_1 + \gamma_1^{-1} x_1^* h_2) + \gamma_2^{-1}\mu A b h_1],$$
$$r_{22} = \Delta[\Delta a_2^2 (x_1^*)^2 - 2\mu a_2 x_1^* + \gamma \sigma_2^2 + \mu b(\gamma_2 A h_1 + a_2 x_1^* h_2) + b h_2(\gamma_1|\gamma b_1 x_2^* - \mu a_1 x_1^*| + \mu a_2 x_1^*)],$$
$$r_{12} = 2\Delta[\gamma b_1 x_2^* - \mu a_1 x_1^* - a_2 x_1^*(1 - \Delta a_1 x_1^*) - \Delta \mu A b].$$

Из [4, теорема 1] вытекает

Утверждение. *Если существуют числа μ, γ, γ_1, γ_2, удовлетворяющие условиям* (8), *такие, что матрица R является отрицательно определенной, то тривиальное решение системы* (7) *асимптотически устойчиво в среднем квадратическом и, следовательно, положительная точка равновесия системы* (6) *устойчива по вероятности.*

При условиях (5) на параметры исходной системы такие числа μ, γ, γ_1, γ_2 существуют.

Теорема. *Если выполнены условия* (5) *и выбранный шаг дискретизации Δ удовлетворяет условиям*

$$\Delta < \frac{b_1}{a_1 b}, \qquad \frac{A_{1\Delta} + B_{1\Delta}\gamma_{1\Delta}}{A_{4\Delta} - B_2\gamma_{2\Delta} - B_{3\Delta}\gamma_{1\Delta}} < \frac{A_{2\Delta} - B_{1\Delta}\gamma_{1\Delta}^{-1}}{A_{3\Delta} + B_2\gamma_{2\Delta}^{-1} + B_{3\Delta}\gamma_{1\Delta}^{-1}}, \tag{9}$$

где

$$A_{1\Delta} = \frac{a_2^2 b \sigma_2^2}{A b_1^2} + \Delta \frac{a_2^2 b^2}{b_1^2}\left(1 - \frac{a_1 \sigma_2^2}{A}\right), \qquad B_{1\Delta} = \frac{a_2 b^2 h_2}{b_1}\left(1 - \Delta \frac{a_1 b}{b_1}\right),$$

$$A_{2\Delta} = 2b\left(\frac{a_1}{b_1} - A h_1\right) - \sigma_1^2 - \Delta b\left(\frac{a_1^2 b}{b_1^2} + A\left(1 - \Delta \frac{a_1 b}{b_1}\right)\right),$$

$$A_{3\Delta} = \frac{2 A b_1}{a_2} + \Delta \frac{A b}{a_2}(A b_1(2h_1 + \Delta) - a_1), \qquad B_2 = A b h_1,$$

$$A_{4\Delta} = \frac{a_2 b}{b_1}\left(2(1 - b h_2) - \sigma_2^2\left(\frac{a_1}{A b_1} + \Delta\right)\right), \qquad B_{3\Delta} = \Delta A b^2 h_2,$$

$$\gamma_{1\Delta} = \frac{\sqrt{B_{1\Delta}^2 + A_{1\Delta}A_{2\Delta}} + B_{1\Delta}}{A_{2\Delta}}, \qquad \gamma_{2\Delta} = \frac{A_{4\Delta}}{\sqrt{B_2^2 + A_{3\Delta}A_{4\Delta}} + B_2},$$

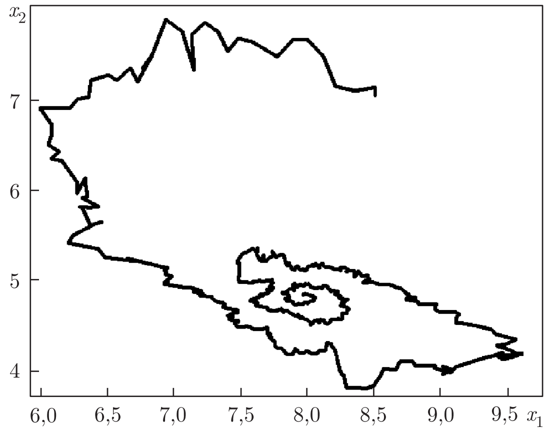

Рис. 1. Траектория устойчивого решения

то тривиальное решение системы (7) *асимптотически устойчиво в среднем квадратическом и, соответственно, положительная точка равновесия* (2) *системы* (6) *устойчива по вероятности.*

Таким образом, при шаге дискретизации, удовлетворяющем условиям (9), разностный аналог (6) сохраняет свойство устойчивости рассматриваемой системы (1).

П р и м е р . Численное моделирование системы (1) проводилось при следующих значениях параметров: $a = 4$, $a_1 = 0{,}2$, $a_2 = 0{,}5$, $b_1 = 0{,}5$, $b = 4$, $h_1 = h_2 = 0{,}02$, $\sigma_1 = 0{,}6$, $\sigma_2 = 0{,}8$, $\varphi_1(s) = 8{,}5\cos s$, $\varphi_2(s) = 8{,}5\sin(s+1)$. При этом $A = 2{,}4$, $A_1 = 1$, $A_2 = 2{,}416$, $A_3 = 4{,}8$, $A_4 = 6{,}96$, $B_1 = 0{,}32$, $B_2 = 0{,}192$, $x_1^* = 8$, $x_2^* = 4{,}8$, $\varphi_1(-2) = 8{,}498$, $\varphi_1(-1) = 8{,}499$, $\varphi_1(0) = 8{,}5$, $\varphi_2(-2) = 7{,}059$, $\varphi_2(-1) = 7{,}106$, $\varphi_2(0) = 7{,}152$. Условия (2), (5) выполняются, первое неравенство (9) принимает вид $\Delta < 0{,}625$. При выбранном шаге дискретизации $\Delta = 0{,}01$ второе неравенство (9) также выполняется: $0{,}236 < 0{,}253$. Было проведено численное моделирование тысячи траекторий системы (1). Все они сходились к точке равновесия. На рис. 1 показана одна из полученных траекторий устойчивого решения системы (6).

1. *Liming Cai, Xuezhi Li, Xinyu Song, Jingyuan Yu.* Permanence and stability of an age-structured prey-predator system with delays // Discrete Dynamics in Nature and Society. – 2007. – Article ID 54861. – 15 p.
2. *Shaikhet L. E.* Stability of a positive point of equilibrium of one nonlinear system with aftereffect and stochastic perturbations // Dynamic Systems and Applications. – 2008. – **17**. – P. 235–253.
3. *Paternoster B., Shaikhet L. E.* About stability of nonlinear stochastic difference equations // Appl. Math. Lett. – 2000. – **13**, No 5. – P. 27–32.
4. *Kolmanovskii V. B., Shaikhet L. E.* General method of Lyapunov functionals construction for stability investigation of stochastic difference equations // Dynamical Systems and Applications. – 1995. – **4**. – P. 397–439.

Донецкий государственный университет управления

Поступило в редакцию 09.01.2008