



УДК 534.3

© 2009

А. О. Борисюк

Генерація шуму турбулентною течією біля краю жорсткої півплощини

(Представлено академіком НАН України В. Т. Грінченком)

Розроблено новий аналітичний метод знаходження поля шуму, яке генерується турбулентною течією біля краю жорсткої півплощини. У цьому методі поле шуму визначається через пульсації тиску (а не через напруження Лайтхіла). Це дає можливість використовувати для пульсацій тиску вже відому з наукової літератури інформацію, а відтак істотно заощаджувати час при проведенні відповідних чисельних розрахунків.

Акустичні поля, що генеруються турбулентними течіями за тілами різних геометрій, становлять значний науковий і практичний інтерес. Для знаходження таких полів зазвичай застосовується теорія Лайтхіла або різні її модифікації [1–6]. Сформульовані в рамках таких теорій граничні задачі розв'язуються, в основному, чисельними або, значно рідше, чисельно-аналітичними методами. Обидва типи методів мають відносні недоліки і переваги, а також межі застосування. Проте всі вони, ґрунтуючись на Лайтхілівському визначенні джерел звуку, потребують дуже детальної і точної інформації про просторово-часову і/або кореляційно-спектральну структуру полів швидкості, масової густини середовища тощо в області, зайнятій турбулентністю, а тому мають низьку (з огляду на використання часу) ефективність. У такій ситуації виникає потреба у розробленні нових (бажано аналітичних або аналітично-чисельних) методів, які, можливо за меншої, але задовільної для потреб практики точності, давали б можливість істотно заощаджувати час при проведенні відповідних чисельних розрахунків.

Такий метод пропонується у даній роботі. Він є аналітичним. У ньому поле шуму, згенероване турбулентністю за тілом, визначається через пульсації тиску p_t , а не через джерела Лайтхіла. Це дає можливість для тиску p_t використовувати вже відому з наукової літератури інформацію, а відтак істотно заощаджувати час.

1. Постановка задачі. Розглядається жорстка півплощина S_r ($x < 0, y = 0$), на верхній поверхні якої у перпендикулярному до її краю $x = 0, y = 0$ напрямку з осередненою швидкістю U тече рідина масової густини ρ (рис. 1). Течія є турбулентною, має ширину L_z , характеризується малим числом Маха і, взаємодіючи з краєм півплощини, генерує шум.

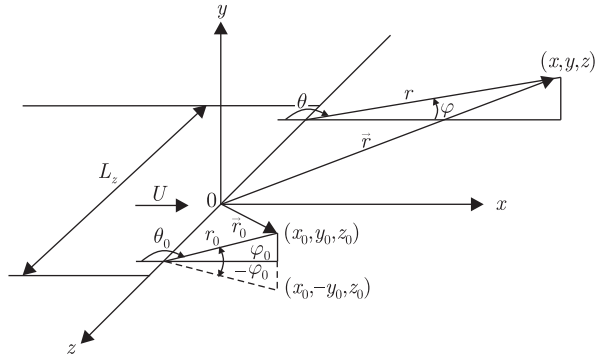


Рис. 1. Геометрія задачі

Необхідно знайти це поле шуму і встановити кількісну залежність його характеристик від параметрів течії і півплощини.

Сформульована задача описується рівнянням Лайтхіла [1–3, 5]:

$$\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho_a = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}, \quad (1)$$

в якому ρ_a — акустичні флуктуації густини; c_0 — швидкість звуку в незбуреному середовищі, а T_{ij} — напруження Лайтхіла (вибір системи координат показано на рис. 1). Граничними умовами є рівність нулю нормальної компоненти акустичної швидкості на поверхні жорсткої структури

$$\left. \frac{\partial \rho_a}{\partial y} \right|_{y=0, x < 0} = 0 \quad (2)$$

та випромінювання у нескінченність.

2. Акустичне поле. Гранична задача (1), (2) розв'язується через застосування до неї часового перетворення Фур'є:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{g}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \check{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i\omega t} dt$$

і подальше використання методу функцій Гріна [7]. Образи Фур'є рівнянь (1) і (2) мають відповідно такий вигляд:

$$\nabla^2 \check{\rho}_a + k_0^2 \check{\rho}_a = -\frac{\partial^2 \check{T}_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \check{\rho}_a}{\partial y} \right|_{y=0, x < 0} = 0, \quad (4)$$

а розв'язок системи (3), (4) дається об'ємним інтегралом [3, 8, 9]

$$\check{\rho}_a(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{\partial^2 \check{T}_{ij}(\vec{r}_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} G(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) dV(\vec{r}_0). \quad (5)$$

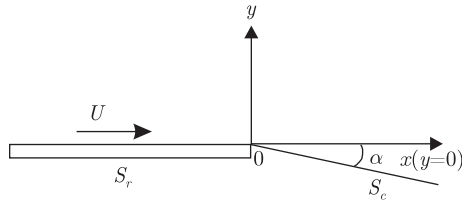


Рис. 2. Модифікована геометрія задачі

Його можна переписати у зручнішій формі [3, 7, 9]:

$$\check{p}_a(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{\partial^2 G(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} \check{T}_{ij}(\vec{r}_0, \omega) dV(\vec{r}_0). \quad (6)$$

У (3)–(6) p_a — акустичний тиск, пов'язаний з густиною ρ_a співвідношенням [2, 5, 7] $p_a = c_0^2 \rho_a$; $k_0 = \omega/c_0$ — акустичне хвильове число; ω — колова частота; V_0 — об'єм турбулентності біля краю півплощини; \vec{r} та \vec{r}_0 — відповідно радіус-вектори точки поля і джерела (див. рис. 1); а G — функція Гріна рівняння Гельмгольца для вибраної півплощини. Функція G задовольняє рівняння

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) + k_0^2 G(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

(де δ — дельта-функція Дірака), граничну умову

$$\left. \frac{\partial G}{\partial y_0} \right|_{y_0=0, x_0 < 0} = 0$$

та умову випромінювання у нескінченність.

Модифікація геометрії задачі. Співвідношення (5), (6) зазвичай використовуються при знаходженні виразів для характеристик акустичного поля (таких, як швидкість, енергія, різні спектри та кореляційні функції тощо) [3, 5, 6]. Проте чисельні розрахунки таких виразів щоразу потребують наявності дуже детальної і точної інформації про просторово-часову і/або кореляційно-спектральну структуру полів параметрів турбулентності, які визначають напруження Лайтхіла T_{ij} (це швидкість, масова густина середовища тощо). Одержання такої інформації пов'язане зі значними затратами часу, що призводить до низької (з огляду на ці затрати) ефективності вищезазначеної процедури знаходження розв'язку. Очевидно, що цю ефективність можна було б значно підвищити (при збереженні задовільної для потреб практики точності) у разі вираження характеристик акустичного поля через параметри турбулентності, інформація про які вже заздалегідь відома.

Таким параметром є пульсації тиску на стінці p_t , для яких є достатня кількість експериментальних і теоретичних даних, а також відповідних емпіричних або напівемпіричних моделей. Проте використання величини p_t як акустичного джерела (замість напружень Лайтхіла) потребує незначної модифікації геометрії задачі. Вона полягає в умовному продовженні півплощини S_r контрольною поверхнею S_c ($x > 0, y = 0$) і повороті останньої навколо краю $x = 0, y = 0$ на малий кут α так (рис. 1 і 2), щоб позбутися турбулентності під поверхнею S_c (течія при сходженні з верхньої поверхні півплощини S_r утворює тонкий клин турбулентності у правому нижньому квадранті $x > 0, y < 0$). Однак при цьому

півплощини S_r та S_c продовжують вважатися копланарними. Підставою для цього є фізично прийнятне припущення про незначний вплив кута α на характеристики дальнього акустичного поля [4, 9].

Акустичний тиск. Для таким чином модифікованої геометрії задачі розв'язок системи (3), (4) переписується у вигляді інтеграла по смузі $x_0 > 0$, $y_0 = 0$, $-L_z/2 < z_0 < L_z/2$ контрольної поверхні S_c , де є турбулентна течія [8, 9]:

$$\check{p}_a(\vec{r}, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{S_c} \check{p}_t(\check{r}_0, \omega) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega)}{\partial y_0} dS(\vec{r}_0). \quad (7)$$

Тут функція Гріна G має вигляд [3, 9, 10]

$$G = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-ik_0 R}}{R} \int_{-\infty}^{u_R} e^{-iu^2} du + \frac{e^{-ik_0 R'}}{R'} \int_{-\infty}^{u_{R'}} e^{-iu^2} du \right], \quad (8)$$

$$u_R = 2 \left(\frac{k_0 r r_0}{D + R} \right)^{1/2} \cos \frac{\theta - \theta_0}{2}, \quad u_{R'} = 2 \left(\frac{k_0 r r_0}{D + R'} \right)^{1/2} \cos \frac{\theta + \theta_0}{2},$$

де R та R' — відстані від джерела та його образу, розташованих відповідно у точках $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (r_0, \theta_0, z_0)$ та $\vec{r}'_0 = (x_0, -y_0, z_0) = (r_0, -\theta_0, z_0)$, до точки поля $\vec{r} = (x, y, z) = (r, \theta, z)$ (див. рис. 1):

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + (z-z_0)^2},$$

$$R' = |\vec{r} - \vec{r}'_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z-z_0)^2} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta + \theta_0) + (z-z_0)^2};$$

а $D = \sqrt{(r+r_0)^2 + (z-z_0)^2}$ — відстань від джерела до точки поля у разі їх розташування на одній прямій, яка проходить через край півплощини S_r .

У дальньому акустичному полі верхні межі інтегрування в інтегралах Френеля у формулі (8) спрощуються

$$u_R \approx \sqrt{2k_0 r_0 \sin \Phi} \cos \frac{\theta - \theta_0}{2}, \quad u_{R'} \approx \sqrt{2k_0 r_0 \sin \Phi} \cos \frac{\theta + \theta_0}{2},$$

$$\sin \Phi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}}$$

і, за умови $k_0 r_0 \ll 1$ (тобто при врахуванні внеску лише найінтенсивніших джерел шуму, розташованих безпосередньо біля краю півплощини S_r) функція Гріна набуває вигляду [8, 9]:

$$G = \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \left[\frac{1}{2} + \frac{2e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2k_0 r_0 \sin \Phi} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} + O(k_0 r_0) \right]. \quad (9)$$

Тоді її нормальна похідна у співвідношенні (7) дається таким виразом [8, 9]:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial y_0} \right|_{y_0=0, x_0>0} = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-ik_0 R_0}}{R_0} \sqrt{2k_0 \sin \Phi} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{x_0}} + O(k_0 r_0), \quad (10)$$

$$R_0 = R|_{y_0=0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$$

є відстанню від джерела, розташованого на контрольній поверхні S_c , до точки поля.

Порівняльний аналіз співвідношення (7) з виразами (5) та (6) показує, що в (7) акустичний тиск виражається через турбулентні пульсації тиску p_t (для яких є достатня кількість літературних даних), а не через напруження Лайтхіла T_{ij} або їхні похідні другого порядку (необхідної інформації про які немає). Крім того, підінтегральний вираз в (7) містить лише одну похідну першого порядку функції Гріна G , тоді як у формулі (6) є аж дев'ять похідних другого порядку функції G . Це вказує на те, що чисельні розрахунки характеристик акустичного поля за виразами, одержаними на основі формули (7), потребуватимуть значно менших часових затрат порівняно з розрахунками на основі формул (5) або (6).

Частотний спектр акустичного тиску. Зазвичай зі всіх статистичних характеристик акустичного поля найбільший інтерес становить частотний спектр $P_a(\vec{r}, \omega)$ тиску p_a [2–9, 11], який характеризує розподіл акустичної енергії за частотою ω у точці поля \vec{r} і визначається зі співвідношення стохастичної ортогональності [2–9, 11]

$$P_a(\vec{r}, \omega)\delta(\omega - \omega') = \langle \check{p}_a^*(\vec{r}, \omega)\check{p}_a(\vec{r}, \omega') \rangle, \quad (11)$$

в якому дужки $\langle \dots \rangle$ означають операцію осереднення за множиною реалізацій, а зірочка вказує на комплексне спряження. Підстановка сюди формули (7) для акустичного тиску дає шуканий вираз для спектра P_a . У разі неоднорідної турбулентності він має такий вигляд [8, 9]:

$$P_a(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{S_c} dx_0 dz_0 \iint_{S_c} S_p(x_0, z_0, x'_0, z'_0, \omega) \left(\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega)}{\partial y_0} \right)^* \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}'_0, \omega)}{\partial y'_0} dx'_0 dz'_0, \quad (12)$$

в якому функція $S_p(x_0, z_0, x'_0, z'_0, \omega)$ має аналітичне представлення і є взаємним спектром турбулентних пульсацій тиску p_t .

Якщо турбулентність однорідна, взаємний спектр S_p стає функцією лише відстані між джерелами і частоти [2, 5, 9, 11]

$$S_p(x_0, z_0, x'_0, z'_0, \omega) = S_p(\xi_x, \xi_z, \omega), \quad \xi_x = x'_0 - x_0, \quad \xi_z = z'_0 - z_0.$$

У цьому випадку він виражається через частотно-хвильовий спектр пульсацій тиску Φ_p [2, 5, 9, 11]:

$$S_p(\xi_x, \xi_z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_p(k_x, k_z, \omega) e^{i(k_x \xi_x + k_z \xi_z)} dk_x dk_z,$$

$$\Phi_p(k_x, k_z, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_p(\xi_x, \xi_z, \omega) e^{-i(k_x \xi_x + k_z \xi_z)} d\xi_x d\xi_z,$$

де k_x та k_z — хвильові числа у напрямках осей x та z відповідно. Тоді формула (12) значно спрощується [8, 9]:

$$P_a(\vec{r}, \omega) = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\check{T}(\vec{r}, k_x, k_z, \omega)|^2 \Phi_p(k_x, k_z, \omega) dk_x dk_z,$$

$$|\check{T}(\vec{r}, k_x, k_z, \omega)|^2 = \frac{2}{(2\pi)^4} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \Phi_0 \frac{k_0 L_z^2}{q_x |\vec{r}|^2} \frac{\sin^2 \frac{q_z L_z}{2}}{\left(\frac{q_z L_z}{2}\right)^2}, \quad (13)$$

$$\sin \Phi_0 = \frac{r}{|\vec{r}|}, \quad q_x = k_x - \frac{k_0 x}{|\vec{r}|}, \quad q_z = k_z - \frac{k_0 z}{|\vec{r}|}.$$

Загальні зауваження. Формули (12) і (13) (разом із (7) та (10)) дають загальний розв'язок задачі про генерацію шуму турбулентною течією біля краю жорсткої півплощини у разі неоднорідної та однорідної турбулентності відповідно (вирази для інших статистичних характеристик поля шуму можна одержати аналогічним чином). У цих формулах всі підінтегральні величини є відомими функціями, а межі інтегрування чітко визначені. Це дозволяє проводити якісний та кількісний аналіз досліджуваних характеристик шуму у відповідних межах зміни параметрів задачі. При цьому чисельні розрахунки таких характеристик не потребуватимуть значних затрат часу.

Таким чином, у даній роботі розроблено новий аналітичний метод знаходження поля шуму, яке генерується турбулентною течією біля краю жорсткої півплощини. Цей метод ґрунтується на використанні методу функцій Гріна, а також методів кореляційно-спектрального аналізу.

У рамках розробленого методу досліджено випадки однорідної та неоднорідної турбулентності і одержано відповідні вирази для статистичних характеристик поля шуму.

Основна перевага запропонованого методу над методами, розробленими іншими дослідниками [2–5], полягає в тому, що в ньому поле шуму визначається через пульсації тиску p_t (а не через напруження Лайтхіла). Це дає можливість використовувати для тиску p_t вже відому з наукової літератури інформацію, а відтак істотно заощаджувати час при проведенні відповідних чисельних розрахунків.

1. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. 1. General theory // Proc. Roy. Soc. London. – 1952. – **A211**. – P. 564–587.
2. *Blake W. K.* Mechanics of flow-induced sound and vibration. Vol. 1, 2. – New York: Acad. Press Inc., 1986. – 974 p.
3. *Ffowcs Williams J. E., Hall L. H.* Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half plane // J. Fluid Mech. – 1970. – **40**. – P. 657–670.
4. *Chase D. M.* Sound radiated by turbulent flow off rigid half-plane as obtained from a wavevector-spectrum of hydrodynamic pressure // J. Acoust. Soc. Amer. – 1972. – **52**. – P. 1011–1023.
5. *Howe M. S.* Acoustics of fluid-structure interactions. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 560 p.
6. *Oberai A. A., Roknaldin F., Hughes T. J. R.* Computation of trailing-edge noise due to turbulent flow over an airfoil // AIAA J. – 2002. – **40 (11)**. – P. 2206–2216.
7. *Голдштейн М. Е.* Аэроакустика. – Москва: Машиностроение, 1981. – 294 с.
8. *Borisyuk A. O.* Prediction of trailing-edge noise from the wall pressure fluctuations // Jahresbericht, Institut für Akustik und Sprachkommunikation, TU Dresden. – 2002. – P. 23–24.

9. *Borisyuk A. O.* Prediction of far-field-sound from turbulence near plate in flow using wall pressure fluctuations as the source model // DFG-Bericht, Institut für Akustik und Sprachkommunikation, TU Dresden. – 2003. – 25 p.
10. *Macdonald H. M.* A class of diffraction problems // Proc. London Math. Soc. – 1915. – **14** (**2**). – P. 410–427.
11. *Borisyuk A. O., Grinchenko V. T.* Vibration and noise generation by elastic elements excited by a turbulent flow // J. Sound Vibr. – 1997. – **204**. – P. 213–237.

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Надійшло до редакції 29.01.2009

A. O. Borisyuk

Noise generation by a turbulent flow near the edge of a rigid half-plane

A new analytical method is developed to predict the noise field generated by a turbulent flow near the edge of a rigid half-plane. In this method, the noise field is determined in terms of pressure fluctuations (rather than Lighthill's stresses). It allows one to use the information, which is already available in the scientific literature, for the pressure and hence to save much time in making the corresponding numerical calculations.