

К. М. Довбня, М. М. Гордієнко

Пружно-пластична ортотропна оболонка довільної кривини з двома тріщинами

(Представлено академіком НАН України В. П. Шевченком)

Застосовано аналог δ_c -моделі, за допомогою якої тривимірну задачу для пружно-пластичної оболонки із системою колінеарних тріщин заданих розмірів зведено до двовимірної задачі напружено-деформованого стану пружної оболонки з наскрізними тріщинами невідомої довжини. Система сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) була розв'язана методом механічних квадратур. Встановлено залежності розкриття тріщин різного типу від відстані між ними.

Напружений стан тонких пружних оболонок із системою колінеарних наскрізних тріщин досліджено в багатьох роботах [1–4]. Результати, що стосуються оболонок із системами ненаскрізних (поверхневих або внутрішніх) тріщин, з'явилися набагато пізніше. Більшість результатів були отримані для оболонок певної кривини (сферичних або циліндричних) [5]. На сьогодні вже розв'язані задачі дослідження напруженого стану пологих пружних оболонок довільної кривини з системами наскрізних і ненаскрізних тріщин [6].

Але, як показують експериментальні дослідження, в пружних оболонках у процесі навантаження на кінцях тріщин виникають області пластичних деформацій, які локалізуються вузькими смугами по всій товщині оболонки на продовженні тріщини. Такі оболонки називають пружно-пластичними, для їх дослідження застосовується δ_c -модель.

У пружно-пластичній постановці були досліджені циліндричні і сферичні оболонки із системою наскрізних і ненаскрізних тріщин [7].

У роботі розглянуто задачу дослідження напруженого стану пружно-пластичної ортотропної оболонки довільної кривини з системою наскрізних або ненаскрізних тріщин.

1. Постановка задачі. Розглянемо оболонку довільної кривини, сталої товщини h , виготовлену з ортотропного матеріалу так, що в кожній її точці лінії головних кривин середньої поверхні збігаються з головними напрямками пружності матеріалу. Система ортогональних координат xuz обрана таким чином, що осі x, y орієнтовані вздовж ліній головних кривин середньої поверхні оболонки, а вісь z спрямована по нормалі до неї (рис. 1).

Оболонка послаблена системою двох колінеарних тріщин (наскрізних, поверхневих або внутрішніх) і навантажена симетричними відносно лінії тріщин зусиллями й моментами. Берега тріщин у процесі деформації не контактують між собою.

2. Розв'язання задачі. Для розв'язання задачі застосовується аналог δ_c -моделі, який дозволяє звести розв'язок тривимірної задачі для пружно-пластичної оболонки з тріщинами заданих розмірів до задачі про напружено-деформований стан пружної оболонки з наскрізними тріщинами невідомої довжини. До берегів цих тріщин прикладені невідомі розтягуюче зусилля T та згинальний момент M , які задовольняють умову пластичності Треска для ортотропних оболонок [8]

$$\tilde{G}(T, M, \sigma_\tau) = 1, \quad (1)$$

де σ_τ — границя текучості матеріалу.

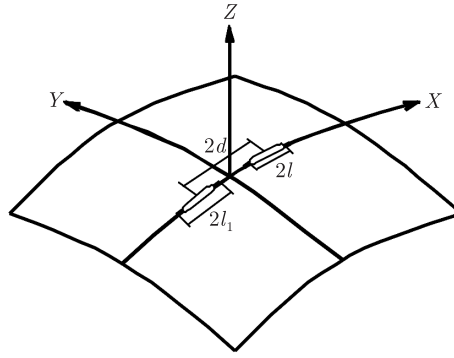


Рис. 1

На берегах тріщини виконуються граничні умови

$$T_2(x) = \begin{cases} T - T_2^*, & d + l \leq |x| \leq d + l + l_p, \\ T^l - T_2^*, & d - l \leq |x| \leq d + l, \\ T - T_2^*, & d - l - l^p \leq |x| \leq d - l, \end{cases} \quad (2)$$

$$M_2(x) = \begin{cases} M - M_2^*, & d + l \leq |x| \leq d + l + l_p, \\ M^l - M_2^*, & d - l \leq |x| \leq d + l, \\ M - M_2^*, & d - l - l^p \leq |x| \leq d - l. \end{cases}$$

Тут T_2^* , M_2^* — характеристики зовнішнього навантаження; l^p — розмір внутрішньої пластичної зони, а l_p — розмір зовнішньої пластичної зони. T^l і M^l виникають у випадку ненаскрізної тріщини і визначаються за формулами

$$T^l = \sigma_\tau(d_1 + d_2), \quad M^l = \sigma_\tau \frac{(h - d_1 - d_2)(d_2 - d_1)}{2}, \quad (3)$$

де d_2 і d_1 — товщина верхнього та нижнього шарів, які визначають розташування внутрішньої тріщини по товщині оболонки. Якщо $d_2 = 0$ або $d_1 = 0$, тріщина вважається поверхневою. Якщо $d_2 = 0$ та $d_1 = 0$, тріщина вважається наскрізною.

Далі можливі два варіанти розв'язання задачі:

між тріщинами на відрітку $2(d - l - l^p)$ виконується закон Гука;

перемічка між тріщинами $2(d - l)$ перебуває цілком в пластичній течії.

Розглядається другий варіант. Згідно з δ_c -моделлю, замість двох тріщин довжиною $2l$ можна ввести нову фіктивну тріщину довжиною $2l_1$, де $l_1 = d + l + l_p$.

Тоді розв'язок задачі про напружений стан пружної ортотропної оболонки довільної кривизни із тріщинами можна звести до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) типу Коші [4]. У випадку однієї тріщини, орієнтованої вздовж осі x , система набуде вигляду:

$$\int_{-1}^1 \sum_{j=1,3} K_{ij}(s-x)\psi_j(s) ds = \pi\Phi_i(x), \quad i = 1, 3, \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned}
K_{11}(\tilde{x}) &= \frac{1}{\tilde{x}} - \frac{2\beta^2\sqrt{1-\mu}}{\sqrt{a}\chi^2}\tilde{x}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(1)}(\beta|\tilde{x}|\chi^{-1}), \\
K_{31}(\tilde{x}) &= \frac{2\beta^2}{\sqrt{a}\chi^2}\tilde{x}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(2)}(\beta|\tilde{x}|\chi^{-1}), \quad K_{13}(\tilde{x}) = \frac{\sqrt{1-\mu}}{(1-\nu)(3+\nu-2\mu)}K_{31}(\tilde{x}), \\
K_{33}(\tilde{x}) &= \frac{1}{\tilde{x}} + \frac{2\beta^2}{(1-\nu)(3+\nu-2\mu)\sqrt{a}\chi^2}\tilde{x}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(3)}(\beta|\tilde{x}|\chi^{-1}), \\
a_n^{(1)}(\tilde{s}) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}|d^2|\tilde{l}_2^{-2}\cos^3\theta\cos(2n-1)\theta\operatorname{Im}G_{n,n-1}(\tilde{s}|d|\sqrt{i})d\theta, \\
a_n^{(2)}(\tilde{s}) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}d^2(\tilde{l}_1\tilde{l}_2)^{-1}\cos\theta(\nu\cos^2\theta+\sin^2\theta)\cos(2n-1)\theta\operatorname{Re}G_{n,n-1}(\tilde{s}|d|\sqrt{i})d\theta, \\
a_n^{(3)}(\tilde{s}) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}d^2\tilde{l}_1^{-2}\frac{(\nu\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{\cos\theta}\cos(2n-1)\theta\operatorname{Im}G_{n,n-1}(\tilde{s}|d|\sqrt{i})d\theta, \\
\beta &= cl_1, \quad c^2 = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{R_2h}, \quad d^2 = \frac{\sqrt{1-\mu}\cos^2\theta+\lambda\sin^2\theta}{a\tilde{l}_1\tilde{l}_2}, \quad \lambda = \frac{R_2}{R_1}, \\
\tilde{l}_1^2 &= 1-4\tilde{\mu}(1+\nu)\cos^22\theta, \quad \tilde{l}_2^2 = 1+4\tilde{\mu}(1-\nu)\cos^22\theta, \quad 4\tilde{\mu} = \mu/2a, \\
\mu &= 1-2(1+\nu)\frac{G_{12}}{E}, \quad 2a = 2-\mu+\mu\nu,
\end{aligned}$$

де $\chi^2 = \sqrt{E_1/E_2}$, $E = \sqrt{E_1E_2}$, $\nu = \sqrt{v_1v_2}$, E_1, E_2 — модулі Юнга; v_1, v_2 — коефіцієнти Пуассона; G_{12} — модуль зсуву для площин, паралельних серединній поверхні оболонки.

Невідомі функції мають вигляд:

$$\psi_1 = \frac{Eh}{4l\chi^2}\sqrt{\frac{1-\mu}{a}}\frac{d[\vartheta]}{ds}; \quad \psi_3 = \frac{D(1-\nu)(3+\nu-2\mu)}{4l\chi^2\sqrt{a}}R_2c^2\frac{d[\theta_2]}{ds},$$

де $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, $\Phi_1(x) = T_2(x)$ і $\Phi_2(x) = M_2(x)$ — праві частини системи (4).

З граничних умов (2) випливає, що праві частини системи — розривні функції. Тому подамо невідомі функції у вигляді

$$\psi_1(s) = g_1(s) + th(s), \quad \psi_3(s) = g_3(s) + mh(s), \quad (5)$$

де $t = (T - T^l)/T_2^*$, $t = c^2R_2(M - M^l)/T_2^*$.

Функція $h(s)$ є аналітичним роз'язком рівняння

$$\int_{-1}^1 \frac{h(s)}{s-x} = \pi f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -a+1, & \tau^* < |x| \leq 1, \\ -a, & \tau_i < |x| \leq \tau^*, \\ -a+1, & |x| \leq \tau_i. \end{cases} \quad (6)$$

Тут $\tau^* = (d+l)/l_1$, $\tau_i = (\gamma-1)\tau^*/(\gamma+1)$, $\gamma = d/l$.

Константа a визначається з умови існування розв'язку рівняння (6) [9]

$$a = \frac{2}{\pi}(\arccos(\tau^*) + \arcsin(\tau_i)). \quad (7)$$

Для пластини з системою наскрізних тріщин можна в аналітичному вигляді одержати довжину пластичної зони:

$$\tau^* = \frac{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}{\sqrt{1 - 2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right) + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2}}.$$

У випадку наскрізної тріщини $a = \sigma_2^*/\sigma_\tau$, де $\sigma_2^* = T_2^*/h$ — напруження, що діє на лінії тріщини в оболонці без тріщини. Якщо довжина перемички дорівнює нулю, тобто $\gamma = 1$, одержуємо значення τ^* для наскрізної тріщини.

Розв'язок рівняння (6) має вигляд

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{(\tau^* - x)(1 + x\tau^* + \sqrt{(1 - (\tau^*)^2})(1 - x^2)}{(\tau^* + x)(1 - x\tau^* + \sqrt{(1 - (\tau^*)^2})(1 - x^2)} \right| + \\ + \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{(\tau_i + x)(1 - x\tau_i + \sqrt{(1 - (\tau_i)^2})(1 - x^2)}{(\tau_i - x)(1 + x\tau_i + \sqrt{(1 - (\tau_i)^2})(1 - x^2)} \right|.$$

Підставимо невідомі функції (5) в систему (4):

$$\int_{-1}^1 \sum_{j=1,3} K_{1j}(x-s)g_j(s)ds + t \left(\int_{-1}^1 K_{11}^r(x-s)h(s)ds + \pi a \right) + m \int_{-1}^1 K_{13}(x-s)h(s)ds = \\ = \pi \left(1 - \frac{T^l}{T_2^*} \right), \quad (8) \\ \int_{-1}^1 \sum_{j=1,3} K_{3j}(x-s)g_j(s)ds + t \int_{-1}^1 K_{31}(x-s)h(s)ds + m \left(\int_{-1}^1 K_{33}^r(x-s)h(s)ds + \pi a \right) = \\ = -\frac{\pi c^2 R_2 M^l}{T_2^*}.$$

Для чисельного розв'язання отриманої системи сингулярних інтегральних рівнянь (8) використовуємо метод механічних квадратур для функцій, обмежених на кінцях проміжку інтегрування, за допомогою якого система СІР зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

3. Результати. На рис. 2–4 зображено залежність відносних розміру тріщини τ^* і розкриття тріщини δ^* від відстані між тріщинами γ . Відносне розкриття тріщини обчислено за формулою

$$\delta^*(x, \tilde{\gamma}) = \frac{4l}{l_1} \frac{\sigma_2^*}{\sigma_\tau} \chi^2 \sqrt{a} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\mu}} \int_{-1}^x \psi_1(s) ds + \tilde{\gamma} \frac{\sqrt{12(1-v^2)}}{(1-v)(3+v-2\mu)} \int_{-1}^x \psi_3(s) ds \right),$$

де $\tilde{\gamma} \in (-1/2 + d_1/h; 1/2 - d_2/h)$.

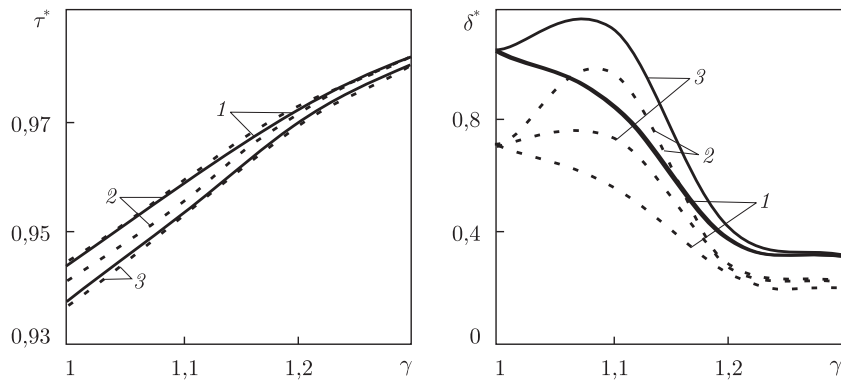


Рис. 2. Залежність τ^* і $\delta^*(\tau^*, 0)$ від γ ($d_1 = d_2 = 0$)

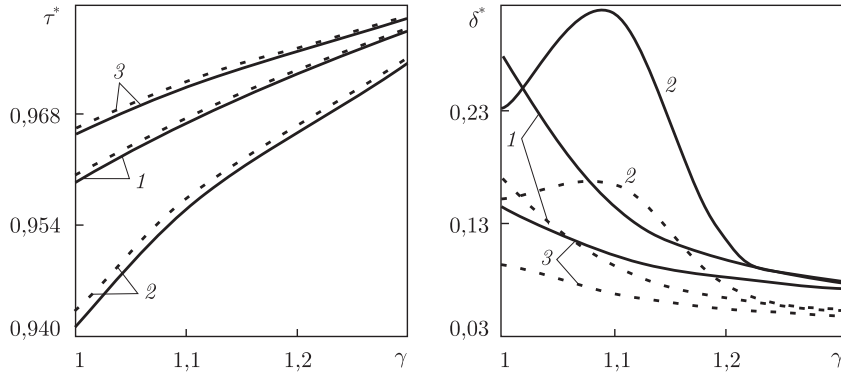


Рис. 3. Залежність τ^* і $\delta^*(\tau^*, 0)$ від γ ($d_1 = 0, d_2 = 0,15$)

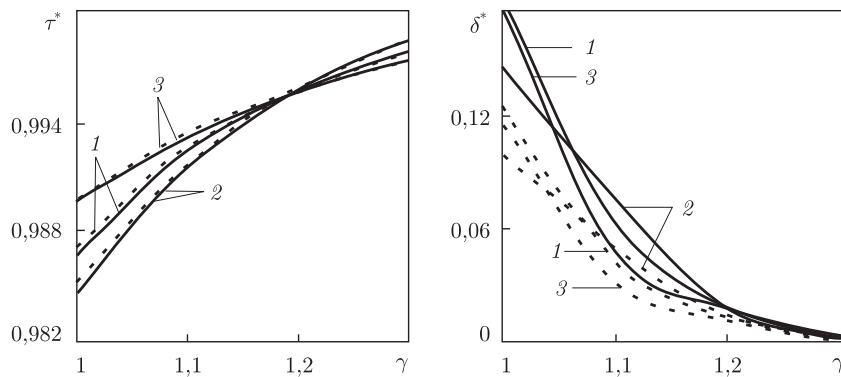


Рис. 4. Залежність τ^* і $\delta^*(\tau^*, 0)$ від γ ($d_1 = 0,05, d_2 = 0,1$)

Ці рисунки ілюструють результати для ортотропних оболонок з системою двох колінарних наскрізних (рис. 2), поверхневих (рис. 3) і внутрішніх (рис. 4) тріщин.

Суцільні лінії відповідають матеріалу I ($E_1 = 14,9 \cdot 10^6$ Па, $E_2 = 0,6 \cdot 10^6$ Па, $G_{12} = 0,4 \cdot 10^6$ Па, $\nu = 0,31$), а штрихові лінії — матеріалу II ($E_1 = 40 \cdot 10^6$ Па, $E_2 = 4 \cdot 10^6$ Па, $G_{12} = 1,5 \cdot 10^6$ Па, $\nu = 0,31$).

Криві 1–3 відповідають псевдосферичній, циліндричній і сферичній оболонкам. При цьому відносно навантаження вважалось рівним $\sigma_2^*/\sigma_\tau = 0,2$, а довжина тріщин $l/R_2 = 0,05$.

Таким чином, на основі наведених вище рисунків можна зробити такі висновки:
при збільшенні відстані між тріщинами γ відносно розкриття тріщини δ^* і відносний розмір пластичної зони $1 - \tau^*$ зменшуються;
спостерігається збільшення значень δ^* та $1 - \tau^*$ при збільшенні параметра ортотропії $\chi^2 \sqrt{a}$;

у випадку системи наскрізних тріщин залежність δ^* та $1 - \tau^*$ від кривини оболонки λ має немонотоний характер;

у випадку системи ненаскрізних тріщин найбільше значення δ^* та $1 - \tau^*$ досягається в циліндричних оболонках, а найменше — в сферичних.

1. Довбня К. М., Яртемик В. В. Оцінка похибки застосування теорії спеціальної ортотропії при розрахунку на міцність ортотропних оболонок з колінеарними розрізами // *Машинознавство*. – 2005. – № 1. – С. 8–11.
2. Николишин М. М. Многослойная цилиндрическая оболочка с системой коллинеарных разрезов // *Механика неоднородных структур*. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 155–156.
3. Осадчук В. А. Напряжения в замкнутой цилиндрической оболочке с системой коллинеарных трещин // *Мат. методы и физ.-мех. поля*. – 1978. – Вып. 7. – С. 38–42.
4. Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Цванг В. А. Ортотропные оболочки с трещинами (разрезами) // *Концентрация напряжений* / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. – Киев: А. С. К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: в 12 т. Т. 7). – С. 212–249.
5. Стасюк Р. З. Исследование возмущенного напряженного состояния замкнутой цилиндрической оболочки с системой несквозных поперечных трещин // *Мат. методы и физ.-мех. поля*. – 1994. – Вып. 37. – С. 63–65.
6. Довбня К. М., Яртемик В. В. Дослідження КІН в оболонці з системою наскрізних і поверхневих колінеарних тріщин // *Тр. ИПММ*. – 2007. – 13. – С. 63–69.
7. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
8. *Композиционные материалы* / Под ред. Л. Браутман, Р. Крок. Т. 2. Механика композиц. материалов / Под ред. Дж. Сендецки. – Москва: Мир, 1978. – 564 с.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 639 с.

Донецький національний університет

Надійшло до редакції 30.01.2009

K. M. Dovbnya, M. M. Gordienko

An elasto-plastic orthotropic shell of an arbitrary curvature with two cracks

By using the δ_c -model, the 3D problem of the elasto-plastic shell with a system of collinear cracks of given sizes is reduced to a 2D problem of a stress-strain state of the elastic shell with through cracks of unknown length. The system of integral equations has been solved within the method of mechanical quadratures. The dependence of the opening displacement of cracks of various types on the distance between them is determined.