ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

О. В. Курікша

Системи двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, інваріантні відносно лінійних реалізацій алгебр Лі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

Виконано повну групову класифікацію систем двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку відносно перетворень, лінійних за залежними змінними.

Груповий аналіз диференціальних рівнянь вперше виник в роботах видатного математика XIX ст. С. Лі. Основну задачу класичного групового аналізу — про розв'язність звичайних диференціальних рівнянь в квадратурах — розв'язано майже повністю самим С. Лі. Він показав, що всі спеціальні методи інтегрування таких рівнянь (заміна змінних, метод інтегруючого множника тощо) можна вивести за допомогою теорії груп [1, 2].

Дослідження симетрій диференціальних рівнянь є алгоритмізованим процесом, який використовується у багатьох пакетах прикладних програм. Але коли йдеться про симетрії цілих класів рівнянь, визначених з точністю до довільних функцій, такі дослідження стають досить нетривіальною задачею, яку не завжди можна розв'язати. Між тим, саме такі задачі є дуже важливими, оскільки дозволяють знаходити широкі класи звичайних диференціальних рівнянь, інтегровних у квадратурах.

У цій роботі вивчено симетрійні властивості систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку, які мають вигляд

$$\dot{u}_a = f_a(u_1, u_2), \tag{1}$$

де u_a — невідомі функції від t, $\dot{u}_a = du_a/dt$. Тут і надалі індекси a, b, c змінюються від 1 до 2. За індексами, що повторюються, йде підсумовування.

Системи рівнянь вигляду (1) широко застосовуються в математичній біології [3, 4] і теорії дифузії [5].

Симетрії системи (1). Добре відомо, що рівняння (1) мають нескінчену симетрію, яка, на жаль, не може бути описана конструктивно [6]. Проте, можна провести групову класифікацію таких рівнянь, якщо накласти певні апріорні обмеження на клас симетрій.

У роботі проведена повна групова класифікація рівнянь вигляду (1) відносно допустимих груп лінійних перетворень для залежних змінних u_a. При цьому для незалежної змінної t допускаються як лінійні, так і нелінійні перетворення.

Задача опису можливих груп симетрій та відповідних нелінійних членів f_a навіть у випадку лінійних перетворень залишається дуже складною. Використовуючи ідеї, які запропоновані та реалізовані у роботах [7–9], для розв'язання цієї задачі спочатку визначимо загальний вигляд базисних елементів алгебр Лі, які відповідають цим симетріям, а потім використаємо умову інваріантності відносно цих алгебр для обчислення f_a.

Оскільки обидві частини рівнянь (1) не залежать від t явно, то ці рівняння з довільними функціями f_1 та f_2 допускають очевидну симетрію відносно зсуву по незалежній змінній t. Відповідний інфінітезимальний оператор X_0 є оператором диференціювання по цій змінній: $X_0 = \partial_t$. Інші оператори симетрії будемо шукати у вигляді:

$$X = \eta\partial_t + \pi^a\partial_{u_a}, \tag{2}$$

де $\pi^a = \pi^{ab}u_b + \omega^a$, а η, π^{ab}, ω^a — функції від незалежної змінної t.

Знайдемо спочатку всі нееквівалентні двовимірні алгебри симетрії для системи (1), що включають оператори X_0 та X. За умовою

$$[X_0, X] = \alpha X_0 + \beta X,$$

де α і β — дійсні сталі. З точністю до перетворень еквівалентності $u_a \to \Lambda^{ab}u_b + \varphi^a$, де Λ^{ab} та φ^a — довільні сталі, маємо шість різних випадків для оператора X:

$$\begin{aligned}
&X_1 = \mu t\partial_t - u_1\partial_{u_1} - \nu u_2\partial_{u_2}, \qquad X_2 = \mu t\partial_t - \partial_{u_1} - u_2\partial_{u_2},\\
&X_3 = \mu t\partial_t - \nu\partial_{u_1} - \partial_{u_2}, \qquad X_4 = e^{\lambda t}(u_1\partial_{u_1} + \nu u_2\partial_{u_2}),\\
&X_5 = e^{\lambda t}(\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}), \qquad X_6 = e^{\lambda t}(\mu\partial_{u_1} + \partial_{u_2}).
\end{aligned} \tag{3}$$

Наступний крок — це побудова тривимірних алгебр Лі, що включають оператор X_0 та оператори X_1, X_2 загального вигляду (2) за умови

$$[X_0, X_a] = \alpha_a X_0 + \beta_{ab}X_b, \qquad [X_1, X_2] = \alpha_0 X_0 + \beta_{0b}X_b.$$

Повний перелік реалізацій таких алгебр подамо у вигляді таблиці. Набори (F_1, G_1), (F_2, G_2) утворюють фундаментальну множину розв'язків системи

$$F_t = \lambda F + \nu G, \qquad G_t = \sigma F + \gamma G,$$

де λ, ν, σ, γ — довільні сталі.

Алгоритм пошуку нелінійностей f_a. Запишемо систему ЗДР (1) у вигляді

$$F_a(u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2) = \dot{u}_a - f_a(u_1, u_2) = 0. \tag{4}$$

Інфінітезимальний оператор X є оператором симетрії рівняння (4), якщо він задовольняє критерій інваріантності [6]:

$$X^{(1)}F\big|_{[F]} = 0,$$

де $[F]$ — многовид, що задає рівняння (4) у просторі струменів першого порядку над змінними t, u_1, u_2, а $X^{(1)} = X + \xi^a \partial_{\dot u_a}$ — перше продовження оператора X. Коефіцієнти ξ^a обчислюються за формулою $\xi^a = D_t(\pi^a) - \dot u_a D_t(\eta)$, де $D_t = \partial_t + \dot u_a \partial_{u_a} + \ddot u_a \partial_{\dot u_a} + \ldots$ — оператор повного диференціювання по змінній t.

Отже, діємо продовженим оператором $X^{(1)}$ на функцію $F = (F_1, F_2)$ та прирівнюємо отриманий вираз до нуля:

$$X^{(1)} F = 0, \qquad \text{або} \qquad \dot\pi^{ab} u_b + \pi^{ab} \dot u_b + \dot\omega^a - \dot\eta \dot u_a = (\pi^{cb} u_b + \omega^c) \frac{\partial f_a}{\partial u_c}.$$

Переходимо на многовид $[F]$, тобто в отриманій рівності заміняємо $\dot u_a$ на f_a. У такий спосіб дістаємо визначальні рівняння для нелінійностей f_a:

$$\dot\pi^{ab} u_b + \pi^{ab} f_b + \dot\omega^a - \dot\eta f_a = (\pi^{cb} u_b + \omega^c) \frac{\partial f_a}{\partial u_c}. \tag{5}$$

Для кожного випадку з формули (3) або табл. 1 підставимо вирази для коефіцієнтів π^{ab}, ω^a та η у (5). В результаті отримуємо систему визначальних рівнянь на довільні елементи f_a. Якщо ця система має розв'язки, то система (1) з такими довільними елементами f_a допускає відповідну алгебру симетрії. Серед отриманих значень f_a далеко не всі будуть цікавими. Будемо нехтувати тими випадками, які є очевидно інтегровними, а саме, коли $f_1 f_2 = 0$ або обидва довільних елемента є функціями тільки однієї залежної змінної або лінійними функціями. Нижче наведемо результати обчислень.

Таблиця 1. Реалізації тривимірних алгебр Лі для систем ЗДР вигляду (1). Всі реалізації включають оператор X_0 та наступні оператори

№	Оператори	№	Оператори
1	$\mu t\partial_t + u_1\partial_{u_1} + \nu t u_2 \partial_{u_2}$, $X_7 = u_2\partial_{u_2}$	22	X_8, $X_{22} = \nu t\partial_t - \partial_{u_2}$
2	$X_8 = \mu t\partial_t - u_1\partial_{u_1}$, $X_9 = \nu t\partial_t - u_2\partial_{u_2}$	23	X_{22}, $X_{23} = \mu t\partial_t - \partial_{u_1}$
3	$F_1 u_1\partial_{u_1} + G_1 u_2\partial_{u_2}$, $F_2 u_1\partial_{u_1} + G_2 u_2\partial_{u_2}$	24	X_{21}, X_{23}
4	$X_{10} = \mu t\partial_t + u_1\partial_{u_1} + \nu\partial_{u_2}$, $X_{11} = \partial_{u_2}$	25	X_{11}, $X_{13} + X_{19}$
5	$\mu t\partial_t + \nu t u_1\partial_{u_1} + \partial_{u_2}$, $X_{12} = u_1\partial_{u_1}$	26	X_{22}, $X_{23} - X_{19}$
6	$(F_1 + G_1 u_1)\partial_{u_2}$, $(F_2 + G_2 u_1)\partial_{u_2}$	27	X_1, X_{16}
7	$F_1 u_1\partial_{u_1} + G_1\partial_{u_2}$, $F_2 u_1\partial_{u_1} + G_2\partial_{u_2}$	28	$X_1\big\|_{\nu=1}$, $X_{24} = \lambda\partial_{u_1} + \partial_{u_2}$
8	X_{11}, $X_{13} = \mu t\partial_t + \partial_{u_1} + \nu t\partial_{u_2}$	29	X_{24}, $\mu t\partial_t + \nu t X_{24} + X_{18}$
9	$X_{14} = \partial_{u_1} + u_1\partial_{u_2}$, $\mu t\partial_t + X_{11} + \nu t X_{14}$	30	X_2, X_{11}
10	X_{11}, $X_{15} = \mu t\partial_t + (\nu t + u_1)\partial_{u_2}$	31	$X_1\big\|_{\nu=1}$, $\nu t\partial_t - X_{17}$
11	$F_1 X_{11} + G_1 X_{14}$, $F_2 X_{11} + G_2 X_{14}$	32	$F_1\partial_{u_1} + G_1\partial_{u_2}$, $F_2\partial_{u_1} + G_2\partial_{u_2}$
12	$\mu t\partial_t + (u_1 + \nu t)\partial_{u_1} + \lambda u_2\partial_{u_2}$, $X_{16} = \partial_{u_1}$	33	$X_1\big\|_{\nu\neq 1}$, X_{19}
13	$X_{17} = (\mu u_1 - u_2)\partial_{u_1} + (u_1 + \mu u_2)\partial_{u_2}$, $\lambda t\partial_t + X_{18} + \nu t X_{17}$	34	$X_7 + X_{13}$, X_{11}
		35	$X_8 - X_{11}$, $-X_{19}$
14	$X_{18} = u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}$, $\lambda t\partial_t + X_{17} + \nu t X_{18}$	36	X_9, X_{19}
15	$X_{19} = u_1\partial_{u_2}$, $\mu t\partial_t + X_{20} + \nu t X_{19}$	37	X_{18}, $X_{23} - X_{19}$
16	X_{19}, $\mu t\partial_t + u_1\partial_{u_1} + (\lambda u_2 + \nu t u_1)\partial_{u_2}$, $\lambda \neq 1$	38	$X_{20} = u_1\partial_{u_1} + (u_1 + u_2)\partial_{u_2}$, $\mu t\partial_t + \nu t X_{20} + X_{19}$
17	$\mu t\partial_t + X_{14} + \nu t(X_7 + X_{18})$, $X_7 + X_{18}$		
18	$-X_{19}$, $\mu t\partial_t + u_1\partial_{u_1} + (1 - \nu t u_1)\partial_{u_2}$	39	X_{19}, $\mu t\partial_t + (\nu t u_1 + u_2)\partial_{u_2}$
19	$X_1\big\|_{\nu=1} - X_{19}$, $X_{21} = \nu t\partial_t - u_1\partial_{u_2}$	40	$X_1\big\|_{\nu=1} - X_{19}$, X_{11}
20	$F_1 X_{20} + G_1 X_{19}$, $F_2 X_{20} + G_2 X_{19}$	41	X_{11}, $X_{15} + X_{18}$
21	$F_1 X_{18} + G_1 X_{17}$, $F_2 X_{18} + G_2 X_{17}$	42	X_{19}, $\mu t\partial_t + (1 + \nu t u_1)\partial_{u_2}$

Системи ЗДР вигляду (1), *інваріантні відносно двовимірних алгебр Лі.*

$$X_1: \quad \dot u_1 = u_1^{1+\mu}F_1(u_2u_1^{-\nu}), \qquad \dot u_2 = u_1^{\nu+\mu}F_2(u_2u_1^{-\nu});$$

$$X_2: \quad \dot u_1 = u_2^{\mu}F_1(u_2e^{-u_1}), \qquad \dot u_2 = u_2^{\mu+1}F_2(u_2e^{-u_1});$$

$$X_3: \quad \dot u_1 = e^{\mu u_2}F_1(\nu u_2 - u_1), \qquad \dot u_2 = e^{\mu u_2}F_2(\nu u_2 - u_1);$$

$$X_4: \quad \dot u_1 = u_1(\lambda\ln|u_1| + F_1(u_2u_1^{-\nu})), \qquad \dot u_2 = u_2(\lambda\ln|u_2| + F_2(u_2u_1^{-\nu}));$$

$$X_5: \quad \dot u_1 = \lambda u_1 + F_1(u_2e^{-u_1}), \qquad \dot u_2 = \lambda u_1u_2 + u_2F_2(u_2e^{-u_1});$$

$$X_6: \quad \dot u_1 = \lambda u_1 + F_1(\nu u_2 - u_1), \qquad \dot u_2 = \lambda u_2 + F_2(\nu u_2 - u_1).$$

Системи ЗДР вигляду (1), *інваріантні відносно тривимірних алгебр Лі.* Перед кожною системою наведена реалізація R_n алгебр Лі, де n — номер реалізації з табл. 1.

$$R_2: \quad \dot u_1 = C_1u_1^{1+\mu}u_2^{\nu}, \qquad \dot u_2 = C_2u_1^{\mu}u_2^{1+\nu};$$

$$R_3: \quad \dot u_1 = u_1(\lambda\ln u_1 + \nu\ln u_2 + C_1), \qquad \dot u_2 = u_2(\sigma\ln u_1 + \gamma\ln u_2 + C_2);$$

$$R_7: \quad \dot u_1 = u_1(\lambda\ln u_1 + \nu u_2 + C_1), \qquad \dot u_2 = \sigma\ln u_1 + \gamma u_2 + C_2;$$

$$R_9,\ \mu\neq 0: \quad \dot u_1 = \frac{\nu}{\mu} + C_1e^{\frac{\mu}{2}u_1^2-\mu u_2}, \qquad \dot u_2 = \frac{\nu}{\mu}u_1 + (C_1u_1 + C_2)e^{\frac{\mu}{2}u_1^2-\mu u_2};$$

$$\mu = 0: \quad \dot u_1 = \nu(2u_2 - u_1^2) + C_1, \qquad \dot u_2 = 2\nu u_1(2u_2 - u_1^2) + u_1 + C_2;$$

$$R_{11}: \quad \dot u_1 = -\frac{\sigma}{2}u_1^2 + \gamma u_1 + \sigma u_2 + C_1,$$

$$\dot u_2 = -\frac{\sigma}{2}u_1^3 + \left(\gamma - \frac{\lambda}{2}\right)u_1^2 + (\nu + C_1 + \sigma u_2)u_1 + \lambda u_2 + C_2;$$

$$R_{13},\ \lambda = 0: \quad \dot u_1 = \frac{\nu}{2}(\mu u_1 - u_2)\ln(u_1^2+u_2^2) + C_1u_1 - \mu\nu(\mu u_1 - u_2)\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + (C_2+\nu)u_2,$$

$$\dot u_2 = \frac{\nu}{2}(\mu u_2 + u_1)\ln(u_1^2+u_2^2) + C_1u_2 - \mu\nu(\mu u_2 + u_1)\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} - (C_2+\nu)u_1;$$

$$R_{14},\ \lambda = 0: \quad \dot u_1 = \nu u_1\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + C_1u_1 + C_2u_2, \qquad \dot u_2 = \nu u_2\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + C_1u_2 - C_2u_1;$$

$$R_{17},\ \mu = \nu = 0: \quad \dot u_1 = C_1\sqrt{u_1^2 - 2u_2}, \qquad \dot u_2 = C_1u_1\sqrt{u_1^2 - 2u_2} + C_2(u_1^2 - 2u_2); \tag{6}$$

$$R_{19}: \quad \dot u_1 = C_1u_1^{\mu-\nu+1}e^{\nu\frac{u_2}{u_1}}, \qquad \dot u_2 = (C_1u_1^{\mu-\nu}u_2 + C_2u_1^{\mu-\nu+1})e^{\nu\frac{u_2}{u_1}};$$

$$R_{20}: \quad \dot u_1 = u_1((\lambda - \nu)\ln u_1 + C_1) + \nu u_2,$$

$$\dot u_2 = u_1((\lambda - \nu - \gamma + \sigma)\ln u_1 + C_2) + u_2\left(\nu + \gamma + (\lambda - \nu)\ln u_1 + C_1 + \nu\frac{u_2}{u_1}\right);$$

$$R_{21}: \quad \dot u_1 = u_1g_1 + u_2g_2, \qquad \dot u_2 = u_2g_1 - u_1g_2,$$

де $$g_1 = \frac{\mu\sigma + \lambda}{2}\ln(u_1^2 + u_2^2) + (\nu + \mu(\gamma - \lambda) - \sigma\mu^2)\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + C_1,$$

$$g_2 = -\frac{\sigma}{2}\ln(u_1^2 + u_2^2) + (\mu\sigma - \gamma)\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + (C_2 + \sigma);$$

$$R_{22}: \quad \dot u_1 = C_1 u_1^{1+\mu} e^{\nu u_2}, \qquad \dot u_2 = C_2 u_1^{\mu} e^{\nu u_2};$$

$$R_{26}: \quad \dot u_1 = C_1 e^{\frac{u_1}{2}(2\nu-\mu u_1)+\mu u_2}, \quad \dot u_2 = (C_1 u_1 + C_2) e^{\frac{u_1}{2}(2\nu-\mu u_1)+\mu u_2};$$

$$R_{38},\ \mu \neq 0: \quad \dot u_1 = \frac{\nu}{\mu} u_1 + C_1 u_1^{\mu+1} e^{-\frac{\mu u_2}{u_1}}, \qquad \dot u_2 = \frac{\nu}{\mu}(u_1+u_2) + (C_1 u_2 + C_2 u_1) u_1^{\mu} e^{-\frac{\mu u_2}{u_1}};$$

$$\mu = 0: \quad \dot u_1 = \nu u_2 + u_1 (C_1 - \nu \ln|u_1|),$$

$$\dot u_2 = C_2 u_1 - \nu (u_1 + u_2) \ln|u_1| + \left(\nu + C_1 + \frac{\nu u_2}{u_1}\right) u_2.$$

Перетворення еквівалентності. Отримані класи систем можуть допускати однопараметричні групи перетворень, які не виводять систему з цього класу. Ці перетворення породжуються операторами вигляду

$$Q = \varphi(t)\partial_t + (\alpha_{ab}(t) u_b + \beta_a(t))\partial_{u_a}.$$

Q є таким оператором тоді і тільки тоді, коли комутатори його першого продовження $Q^{(1)}$ з першими продовженнями знайдених (лінійно незалежних) операторів ліївської симетрії Y_s, $s = \overline{1,l}$, систем з класу є лінійними комбінаціями тих же операторів з функціональними коефіцієнтами, тобто

$$[Q^{(1)}, Y_s] = \gamma_{ss'}(t, u_1, u_2) Y_{s'}, \qquad s = \overline{1,l}. \tag{7}$$

Знайдемо такі перетворення для системи, інваріантної відносно реалізації R_{14}, (див. (6)):

$$\dot u_1 = \nu u_1 \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + C_1 u_1 + C_2 u_2, \qquad \dot u_2 = \nu u_2 \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + C_1 u_2 - C_2 u_1. \tag{8}$$

Вважаємо, що $\nu \neq 0$, оскільки в протилежному випадку маємо лінійну систему ЗДР зі сталими коефіцієнтами. Система (8) допускає тривимірну алгебру Лі з операторами

$$X_0 = \partial_t, \qquad X_1 = u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}, \qquad X_2 = \nu t X_1 - u_2\partial_{u_1} + u_1\partial_{u_2}. \tag{9}$$

Запишемо їх перші продовження

$$Y_1 = \partial_t, \qquad Y_2 = X_1 + \dot u_1 \partial_{\dot u_1} + \dot u_2 \partial_{\dot u_2},$$

$$Y_3 = X_2 + (\nu u_1 + \nu t \dot u_1 - \dot u_2)\partial_{\dot u_1} + (\nu u_2 + \nu t \dot u_2 + \dot u_1)\partial_{\dot u_2}.$$

Перше продовження оператора Q має вигляд

$$Q^{(1)} = Q + (\dot\alpha_{ab}(t) u_b + \alpha_{ab}(t)\dot u_b + \dot\beta_a(t) - \dot u_a \dot\varphi(t))\partial_{\dot u_a}.$$

З рівнянь, отриманих з умови (7) для $s = 1$, дістаємо

$$\alpha_{11} = \varkappa_{11} + \gamma_2 t + \frac{\nu\gamma_3}{2} t^2, \qquad \alpha_{12} = \varkappa_{12} - \gamma_3 t,$$

$$\alpha_{21} = \varkappa_{21} + \gamma_3 t, \qquad \alpha_{22} = \varkappa_{22} + \gamma_2 t + \frac{\nu\gamma_3}{2} t^2,$$

$$\varphi = \varkappa_0 + \gamma_1 t, \qquad \gamma_a = \text{const}, \qquad \beta_a = \text{const}.$$

Розглянувши умову (7) для $s = 2, 3$, маємо

$$\beta_a = 0, \qquad \varkappa_{11} = \varkappa_{22}, \qquad \varkappa_{12} = -\varkappa_{21}.$$

Отже, оператор Q є лінійною комбінацією операторів

$$\partial_t, \qquad u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}, \qquad t(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) - u_2\partial_{u_1} + u_1\partial_{u_2},$$

$$t\partial_t, \qquad -u_2\partial_{u_1} + u_1\partial_{u_2}, \qquad \frac{\nu t^2}{2}(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + t(-u_2\partial_{u_1} + u_1\partial_{u_2}).$$

Перші три оператори є операторами ліївської симетрії системи (8). Тому групи перетворень, які відповідають цим операторам, не змінюють систему. Останній оператор є неліївським, але породжує перетворення з групи еквівалентності.

Оператор $t\partial_t$ відповідає групі масштабних перетворень змінної t. Групу масштабних перетворень можна розширити за допомогою дискретних перетворень заміною знаку t на протилежний. За допомогою перетворення $t \to \nu t$, можна віднормувати константу ν в 1. Тоді система (8) набуде вигляду

$$\dot u_1 = u_1 \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + \widetilde{C}_1 u_1 + \widetilde{C}_2 u_2, \qquad \dot u_2 = u_2 \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + \widetilde{C}_1 u_2 - \widetilde{C}_2 u_1, \tag{10}$$

де $\widetilde{C}_a = \nu^{-1} C_a$.

Оператор $-u_2\partial_{u_1} + u_1\partial_{u_2}$ відповідає групі поворотів залежних змінних. Поворот

$$u_1 \to u_1 \cos\widetilde{C}_1 + u_2 \sin\widetilde{C}_1, \qquad u_2 \to u_2 \cos\widetilde{C}_1 - u_1 \sin\widetilde{C}_1$$

відображає систему (10) у систему такого ж вигляду, де $\widetilde{C}_1 = 0$.

Розглянемо тепер оператор

$$\frac{\nu t^2}{2}(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + t(-u_2\partial_{u_1} + u_1\partial_{u_2}).$$

Йому відповідає однопараметрична група перетворень залежних змінних

$$u_1 \to e^{\frac{\varepsilon t^2}{2}}(u_1 \cos\varepsilon t - u_2 \sin\varepsilon t), \qquad u_2 \to e^{\frac{\varepsilon t^2}{2}}(u_2 \cos\varepsilon t + u_1 \sin\varepsilon t).$$

Перетворення довільних елементів ν, C_a класу (8) задаються формулами $\nu \to \nu$, $C_1 \to C_1$, $C_2 \to C_2 - \varepsilon$. Якщо вибрати параметр $\varepsilon = \widetilde{C}_2$, то система рівнянь (10) зведеться до вигляду:

$$\dot u_1 = u_1 \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1}, \qquad \dot u_2 = u_2 \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1}. \tag{11}$$

Отже, з точністю до отриманих перетворень еквівалентності замість класу систем (8) достатньо розглянути їх простий представник (11), що не включає довільних сталих. Таким же чином можна звести до більш простих всі системи наведені у пункті 3, але ми надали перевагу заданню систем у більш загальній формі (6).

Висновки. У роботі проведено повну групову класифікацію систем ЗДР першого порядку вигляду (1) відносно допустимих груп лінійних перетворень для залежних змінних u_1 і u_2. Знайдені рівняння допускають дво- або тривимірні алгебри симетрій. Якщо система

ЗДР допускає тривимірну алгебру Лі, то вона може бути проінтегрована у квадратурах з використанням стандартного алгоритму Лі без залучення оператора X_0. Системи, що допускають двовимірні алгебри Лі, можна звести до напівзачепленої системи, яка також інтегрується у квадратурах. Процедура інтегрування рівнянь, які допускають підхожі алгебри ліївських симетрії, відома і описана в монографіях [2, 6, 10]. Наведемо приклад її використання.

Розглянемо систему (8), що допускає оператори ліївської симетрії (9).

Введемо нові змінні $\widetilde{u}_1 = \widetilde{u}_1(u_1, u_2)$ та $\widetilde{u}_2 = \widetilde{u}_2(u_1, u_2)$ таким чином, щоб оператори X_1 і X_2 перетворилися на оператори зсувів по новим змінним. Такі змінні є розв'язками наступної системи рівнянь:

$$X_1\widetilde{u}_1 = 1, \qquad X_1\widetilde{u}_2 = 0, \qquad X_2\widetilde{u}_1 = 0, \qquad X_2\widetilde{u}_2 = 1,$$

звідки

$$\widetilde{u}_1 = \frac{1}{2}\ln(u_1^2 + u_2^2) - \nu t \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1}, \qquad \widetilde{u}_2 = \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1}.$$

Тоді система рівнянь (8) та оператори (9) приймають вигляд:

$$\dot{\widetilde{u}}_1 = C_1 + C_2\nu t, \qquad \dot{\widetilde{u}}_2 = -C_2,$$

$$\widetilde{X}_1 = \partial_{\widetilde{u}_2}, \qquad \widetilde{X}_2 = \partial_{\widetilde{u}_1}.$$

Отриману систему ЗДР можна легко проінтегрувати:

$$\widetilde{u}_1 = C_1 t + \frac{C_2\nu}{2}t^2 + C_3, \qquad \widetilde{u}_2 = -C_2 t + C_4.$$

Повертаючись до функцій u_1 та u_2 отримуємо розв'язок системи (8):

$$u_1 = e^{-\frac{C_2\nu}{2}t^2 + (C_4\nu + C_1)t + C_3}\cos(C_2 t - C_3),$$

$$u_2 = -e^{-\frac{C_2\nu}{2}t^2 + (C_4\nu + C_1)t + C_3}\sin(C_2 t - C_3).$$

Аналогічним чином інтегруються всі системи з переліку (6).

Автор вдячна А. Г. Нікітіну та Р. О. Поповичу за постановку задачі та корисні дискусії.

1. *Ибрагимов Н. Х.* Азбука группового анализа. – Москва: Знание, 1989. – 48 с.
2. *Lie S.* Theorie der Transformationsgruppen, Vol. 1–3. – Leipzig, 1888, 1890, 1893. – 645 p., 568 p., 830 p.
3. *Murray J. D.* Mathematical biology I: An introduction, 3rd ed. – New York: Springer, 2002. – 551 p.
4. *Murray J. D.* Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications, 3rd ed. – New York: Springer, 2002. – 811 p.
5. *Vreeken J.* A friendly introduction to reaction-diffusion systems // Internship Paper, AILab Zurich, 2002. – 17 p.
6. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.
7. *Gangon L., Winternitz P.* Symmetry classes of variable coefficient nonlinear Schrödinger equations // J. Phys. A. – 1993. – **26**, No 23. – P. 7061–7076.
8. *Zhdanov R. Z., Lagno V. I.* Conditional symmetry of a porous medium equation // Phys. D. – 1998. – **122**, No 1–4. – P. 178–186.

9. *Nikitin A. G.* Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I. Generalized Landau–Ginzburg equations // J. Math. Anal. Appl. – 2006. – **324**, No 1. – P. 615–628.
10. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 28.04.2009

O. V. Kuriksha

Systems of two first-order ordinary differential equations invariant with respect to linear realizations of Lie algebras

The complete group classification of systems of two first-order ordinary differential equations with respect to transformations linear in dependent variables is carried out.