



УДК 539.3

© 2009

Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев,
академик НАН Украины В. П. Шевченко

Фундаментальное решение уравнений {1,2}-аппроксимации безмоментного термоупругого состояния трансверсально-изотропных пластин

Розглянуто задачу термопружності для трансверсально-ізо­т­ропних пластин, що перебувають під дією зосереджених “плоских” джерел тепла. Використано рівняння тер­мо­пружності {1,2}-апроксимації, які враховують поперечні зсувні та нормальні напруження. Чисельні розрахунки присвячені дослідженню впливу теплових і термомеханічних параметрів трансверсально-ізо­т­ропних пластин на їх термопружний стан.

Фундаментальное решение уравнений термоупругости имеет определенный механический смысл — это решение задачи о действии сосредоточенного температурного воздействия [1]. Для изотропных и ортотропных пластин эта задача решена лишь в рамках классической теории термоупругости тонких пластин, включающей плоскую задачу и изгиб [2, 3]. В данной работе впервые использованы уравнения {1,2}-аппроксимации для трансверсально-изотропных пластин, описывающие безмоментное термоупругое состояние. Они учитывают все компоненты тензора напряжений, включая поперечные сдвиговые и нормальные напряжения.

Постановка задачи. Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину толщиной $2h$, находящуюся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой нулевой температуры. Пластина находится под воздействием источников тепла объемной плотности $W_0(x, y, z)$, распределение которых по толщине пластины описывается четной функцией. Рассмотрим случай симметричного теплообмена, когда величина параметров теплообмена на лицевых поверхностях пластины одинакова. Тогда в пластине возникнет лишь безмоментное термоупругое состояние.

Представим компоненты термоупругого состояния пластины в виде рядов по полиномам Лежандра от нормальной координаты z . В рамках {1,2}-аппроксимации для безмоментного термоупругого состояния компоненты вектора перемещений и тензора напряжений имеют следующий вид [4]:

$$u_x = uP_0, \quad u_y = vP_0, \quad u_z = w_1P_1; \quad \sigma_x = \frac{N_x}{2h}P_0 \quad (x \rightarrow y),$$

$$\tau_{xy} = \frac{S}{2h}P_0, \quad \tau_{xz} = \frac{3Q_{x1}}{2h}(P_1 - P_3) \quad (x \rightarrow y), \quad \sigma_z = \frac{R_0}{2h}(P_0 - P_2).$$

Здесь u, v, w_1 — обобщенные перемещения пластины, из которых u и v являются аналогами перемещений точек срединной поверхности пластины; $N_x, N_y, S, Q_{x1}, Q_{y1}, R_0$ — обобщенные усилия, из которых N_x, N_y и S являются аналогами мембранных усилий; P_i ($i = \overline{0, 3}$) — полиномы Лежандра.

Для температуры T в рассматриваемом случае остается лишь четная составляющая ее распределения по толщине пластины и она представима в виде $T = T_0 P_0$, где T_0 — коэффициент разложения температуры, который является ее интегральной характеристикой — средней температурой.

Введем безразмерную систему координат ($x_1 = x/h, x_2 = y/h, x_3 = z/h$). Тогда исходная система дифференциальных уравнений термоупругости {1,2}-аппроксимации, описывающая безмоментное термоупругое состояние, включает в себя следующие уравнения [4, 5].

1. Уравнение теплопроводности 1-го приближения [5]

$$\frac{\lambda}{\lambda'} \Delta T_0 - \frac{3Bi}{Bi+3} T_0 = -w_{00}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad w_{00} = \frac{h^2}{2\lambda'} \int_{-1}^1 W_0 P_0 dx_3, \quad (1)$$

где λ, λ' — коэффициенты теплопроводности в плоскости изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней; $Bi = Bi^\pm$ — критерий Био на лицевых поверхностях пластины $x_3 = \pm 1$; w_{00} — плотность распределения “плоских” источников тепла, источников средней температуры.

2. Уравнения физического закона, в котором обобщенные усилия определены к величине Eh , а обобщенные перемещения — к величине h

$$\begin{aligned} N_1 &= B_0 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} - \alpha(1 + \nu)T_0 \right\} + \lambda_0 R_0, \\ N_2 &= B_0 \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha(1 + \nu)T_0 \right\} + \lambda_0 R_0, \\ S &= \frac{1 - \nu}{2} B_0 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\}, \\ Q_{j1} &= \Lambda'_0 \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \quad (j = \overline{1, 2}), \\ R_0 &= \Omega'_0 \left\{ w_1 + \lambda_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) - \alpha(2\lambda_0 + \alpha^*)T_0 \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{2}{1 - \nu^2}, \quad \Lambda'_0 = \frac{7}{15} \frac{1}{E/G'}, \quad \Omega'_0 = \frac{5}{3} \frac{(1 - \nu)/E^*}{1 - \nu - 2(\nu')^2 E^*}, \\ \lambda_0 &= \frac{\nu'}{1 - \nu} E^*, \quad E^* = \frac{E}{E'}, \quad \alpha^* = \frac{\alpha'}{\alpha}, \end{aligned}$$

E, E' — модули Юнга в плоскости изотропии и в перпендикулярной к ней плоскости; ν, ν' и α, α' — коэффициенты Пуассона и коэффициенты линейного температурного расширения, соответствующие этим плоскостям; G' — модуль сдвига в нормальной плоскости.

3. Уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{21}}{\partial x_2} - R_0 = 0. \quad (3)$$

Подставляя уравнения физического закона (2) в уравнения равновесия (3), получим разрешающие уравнения в обобщенных перемещениях

$$L_{j1}^0 u + L_{j2}^0 v + L_{j3}^0 w_1 = \alpha C \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (4)$$

$$L_{31}^0 u + L_{32}^0 v + L_{33}^0 w_1 = \Omega'_0 \alpha (2\lambda_0 + \alpha^*) T_0,$$

где операторы $L_{11}^0, \dots, L_{33}^0$ имеют вид

$$L_{11}^0 = A \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1-\nu}{2} B_0 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad L_{12}^0 = L_{21}^0 = \left(A + \frac{\nu-1}{2} B_0 \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$L_{13}^0 = L_{31}^0 = \lambda_0 \Omega'_0 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad L_{22}^0 = \frac{1-\nu}{2} B_0 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + A \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad L_{33}^0 = \Omega'_0 - \Lambda'_0 \Delta,$$

$$L_{23}^0 = L_{32}^0 = \lambda_0 \Omega'_0 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad A = B_0 + \lambda_0^2 \Omega'_0, \quad C = B_0(1+\nu) + \lambda_0 \Omega'_0 (2\lambda_0 + \alpha^*).$$

В случае сосредоточенного температурного воздействия на тонкостенные элементы конструкций принимаем

$$W_0(x_1, x_2, x_3) = W_0^* \delta(x_1, x_2) f(x_3). \quad (5)$$

Здесь W_0^* — размерная константа; $\delta(x_1, x_2)$ — двумерная дельта-функция Дирака; $f(x_3)$ — четная функция распределения объемных источников тепла по толщине элемента конструкции, которая в рамках рассматриваемой аппроксимации равна единице.

При решении задач о действии сосредоточенных температурных воздействий рассматривают локальное термоупругое состояние. Предполагаем, что рассматриваемое термоупругое состояние близко к нулю на линии внешней границы пластины. Справедливость данного предположения проверяется после решения задачи. В связи с этим пластину можно считать бесконечной и не учитывать граничные условия.

Методика решения. Фундаментальное решение системы уравнений термоупругости получено с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье. Решение уравнения теплопроводности (1) с учетом (5) в пространстве трансформант (ξ_1, ξ_2) имеет вид

$$\tilde{T}_0 = \frac{w_{00}^*}{2\pi\lambda^*} \frac{1}{p^2 + \rho_1^2}, \quad p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad \rho_1^2 = \frac{3Bi}{\lambda^*(Bi+3)}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda'}, \quad (6)$$

где $w_{00}^* = h^2 W_0^* / \lambda'$ — приведенная интенсивность “плоского” источника тепла.

Система разрешающих уравнений (4) в пространстве трансформант записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(A\xi_1^2 + \frac{1-\nu}{2} B_0 \xi_2^2 \right) \tilde{u} + \left(A + \frac{\nu-1}{2} B_0 \right) \xi_1 \xi_2 \tilde{v} + \lambda_0 \Omega'_0 i \xi_1 \tilde{w}_1 &= \alpha C i \xi_1 \tilde{T}_0, \\ \left(A + \frac{\nu-1}{2} B_0 \right) \xi_1 \xi_2 \tilde{u} + \left(\frac{1-\nu}{2} B_0 \xi_1^2 + A \xi_2^2 \right) \tilde{v} + \lambda_0 \Omega'_0 i \xi_2 \tilde{w}_1 &= \alpha C i \xi_2 \tilde{T}_0, \\ -\lambda_0 \Omega'_0 i (\xi_1 \tilde{u} + \xi_2 \tilde{v}) + (\Omega'_0 + \Lambda'_0 p^2) \tilde{w}_1 &= \alpha \Omega'_0 (2\lambda_0 + \alpha^*) \tilde{T}_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений (7) относительно искомых величин \tilde{u} , \tilde{v} и \tilde{w}_1 с учетом значения трансформанты температуры (6), найдем

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \alpha w_{00}^* \left[c_{11} \frac{i\xi_1}{p^2(p^2 + d^2)} + c_{12} \frac{i\xi_1}{p^2(p^2 + \rho_1^2)} \right], \\ \tilde{v} &= \alpha w_{00}^* \left[c_{11} \frac{i\xi_2}{p^2(p^2 + d^2)} + c_{12} \frac{i\xi_2}{p^2(p^2 + \rho_1^2)} \right], \quad \tilde{w}_1 = \alpha w_{00}^* c_{21} \left(\frac{1}{p^2 + d^2} - \frac{1}{p^2 + \rho_1^2} \right).\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}c_{11} &= \frac{C(b^2 - d^2)}{2\pi\lambda^* Aq^2}, \quad c_{12} = \frac{C(\rho_1^2 - b^2)}{2\pi\lambda^* Aq^2}, \quad c_{21} = \frac{d^2\beta^*}{2\pi\lambda^* q^2}; \\ d^2 &= \frac{B_0\Omega'_0}{A\Lambda'_0}, \quad b^2 = (1 + \nu)\frac{A}{C}d^2, \quad \beta^* = \lambda_0(1 - \nu) + \alpha^*, \quad q^2 = \rho_1^2 - d^2.\end{aligned}$$

Применяя двумерное интегральное преобразование Фурье к уравнениям физического закона (2) и заменяя \tilde{T}_0 его значением (6), получим выражения для трансформант обобщенных усилий

$$\begin{aligned}\tilde{N}_1 &= -\alpha w_{00}^*(1 - \nu)B_0 \left[c_{11} \frac{\xi_2^2}{p^2(p^2 + d^2)} + c_{12} \frac{\xi_2^2}{p^2(p^2 + \rho_1^2)} \right], \\ \tilde{N}_2 &= -\alpha w_{00}^*(1 - \nu)B_0 \left[c_{11} \frac{\xi_1^2}{p^2(p^2 + d^2)} + c_{12} \frac{\xi_1^2}{p^2(p^2 + \rho_1^2)} \right], \\ \tilde{S} &= \alpha w_{00}^*(1 - \nu)B_0 \left[c_{11} \frac{\xi_1\xi_2}{p^2(p^2 + d^2)} + c_{12} \frac{\xi_1\xi_2}{p^2(p^2 + \rho_1^2)} \right], \\ \tilde{Q}_{j1} &= -\alpha w_{00}^*\Lambda'_0 c_{21} \left(\frac{i\xi_j}{p^2 + d^2} - \frac{i\xi_j}{p^2 + \rho_1^2} \right) \quad (j = \overline{1, 2}), \\ \tilde{R}_0 &= \alpha w_{00}^*\Lambda'_0 c_{21} \left(\frac{d^2}{p^2 + d^2} - \frac{\rho_1^2}{p^2 + \rho_1^2} \right).\end{aligned}$$

Решение в пространстве оригиналов найдем, применяя методику обращения, основанную на использовании специальной функции $G_{n,\nu}(z)$ [6]. Все искомые величины переведем в полярную систему координат (r, φ) . Тогда обобщенные перемещения и усилия примут следующий вид:

$$\begin{aligned}u_r &= -\alpha w_{00}^* \frac{r}{2} [c_{11} G_{1,0}(dr) + c_{12} G_{1,0}(\rho_1 r)], \quad u_\varphi = 0; \\ w_1 &= \alpha w_{00}^* c_{21} [G_{0,0}(dr) - G_{0,0}(\rho_1 r)]; \\ N_{r,\varphi} &= -\frac{1}{2} \alpha w_{00}^*(1 - \nu) B_0 \{ [c_{11} G_{0,0}(dr) + c_{12} G_{0,0}(\rho_1 r)] \mp \\ &\quad \mp [c_{11} G_{1,1}(dr) + c_{12} G_{1,1}(\rho_1 r)] \}, \quad S_{r\varphi} = 0; \\ Q_{r1} &= -\alpha w_{00}^* \Lambda'_0 c_{21} \frac{r}{2} [d^2 G_{1,0}(dr) - \rho_1^2 G_{1,0}(\rho_1 r)], \quad Q_{\varphi 1} = 0; \\ R_0 &= \alpha w_{00}^* \Lambda'_0 c_{21} [d^2 G_{0,0}(dr) - \rho_1^2 G_{0,0}(\rho_1 r)].\end{aligned} \tag{8}$$

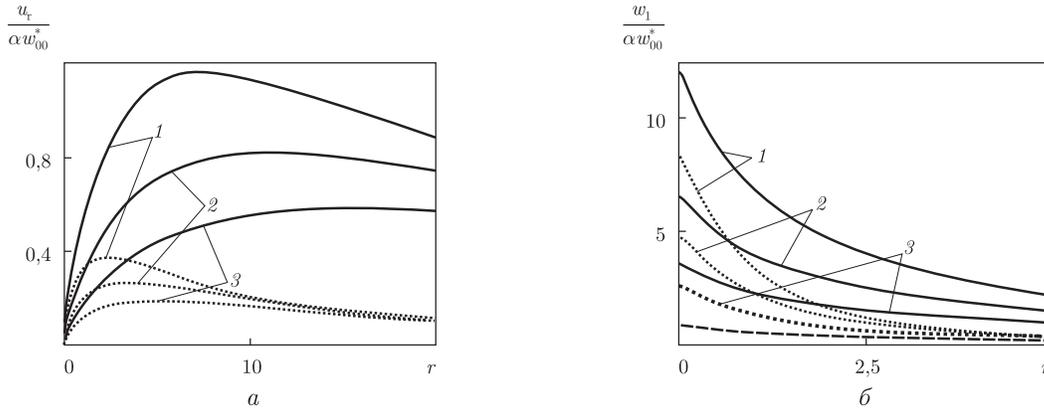


Рис. 1

Из формул (8) следует, что в трансверсально-изотропной пластине под действием сосредоточенного “плоского” источника тепла при симметричном теплообмене возникает осесимметричное термоупругое состояние, как и в изотропных пластинах при аналогичных условиях.

Учитывая свойства специальной G -функции при $|z| \rightarrow 0$ [6], получим формулы асимптотического поведения решения

$$\begin{aligned}
 u_r &\approx -\frac{\alpha w_{00}^* C}{4\pi \lambda^* A} r \ln r, & w_1 &\approx \text{const}; & N_{r,\varphi} &\approx \frac{\alpha w_{00}^* (1-\nu) B_0 C}{4\pi \lambda^* A} \ln r, \\
 Q_{r1} &\approx \frac{\alpha w_{00}^* \Lambda_0' d^2 \beta^*}{4\pi \lambda^*} r \ln r, & R_0 &\approx \frac{\alpha w_{00}^* \Lambda_0' d^2 \beta^*}{2\pi \lambda^*} \ln r,
 \end{aligned} \tag{9}$$

которые для N_r и N_φ аналогичны асимптотическим зависимостям для мембранных усилий в изотропных пластинах в случае плоской задачи [2].

Анализ результатов численных исследований. Численные расчеты проведены для трех видов материала пластины: трансверсально-изотропного ($E^* = 5$; $\nu = 0,3$; $\nu' = 0,07$; $\alpha^* = 10$); изотропного по тепловым свойствам ($E^* = 5$; $\nu = 0,3$; $\nu' = 0,07$; $\lambda^* = 1$; $\alpha^* = 1$); изотропного ($E^* = 1$; $E/G' = 2,6$; $\nu = \nu' = 0,3$; $\lambda^* = 1$; $\alpha^* = 1$). Результаты исследований в виде графиков изменения обобщенных перемещений и усилий от радиальной координаты r приведены на рис. 1–3.

Графики на рис. 1, 2 демонстрируют зависимость компонент термоупругого состояния от теплофизических параметров ($E/G' = 40$). Кривые 1, 2, 3 на этих рисунках соответствуют следующим значениям параметра относительной теплопроводности в плоскости изотропии λ^* : 1/2; 1; 2. Значения параметра теплообмена Bi брались такими: $Bi = 0,1$ — пунктирная линия; $Bi = 0,01$ — сплошная линия (рис. 1); $Bi = 0,001$ — сплошная линия (рис. 2). Штриховой линией показаны результаты расчетов для материала, изотропного по тепловым свойствам, при $Bi = 0,01$ на рис. 1, б и при $Bi = 0,001$ на рис. 2, б.

Из рис. 1, 2 следует, что термоупругое состояние трансверсально-изотропной пластины существенно зависит от теплофизических параметров λ^* , Bi и α^* . С увеличением λ^* и Bi компоненты термоупругого состояния убывают по абсолютной величине. Для параметра α^* наблюдается обратная зависимость.

На рис. 3 представлена зависимость трансверсальных обобщенных усилий от параметра сдвиговой податливости E/G' при $\lambda^* = 1/2$, $Bi = 0,001$. Кривые 1, 2, 3 отвечают следую-

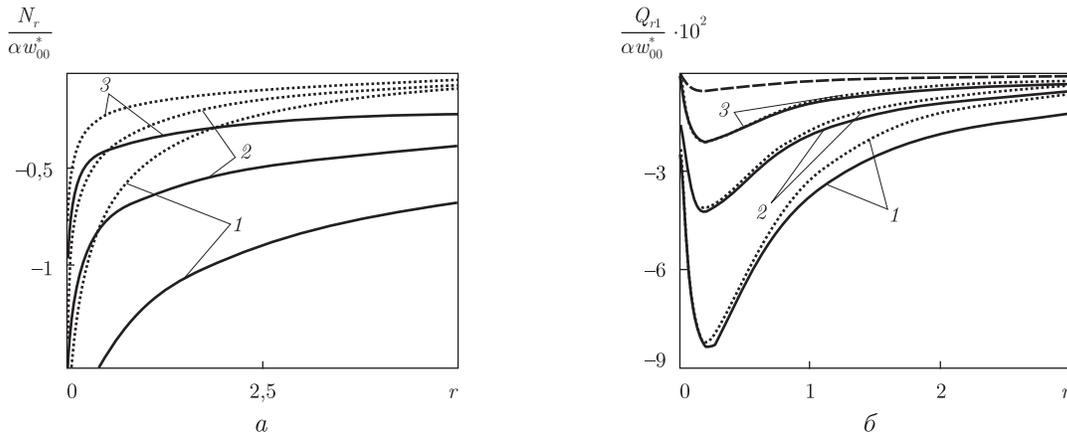


Рис. 2

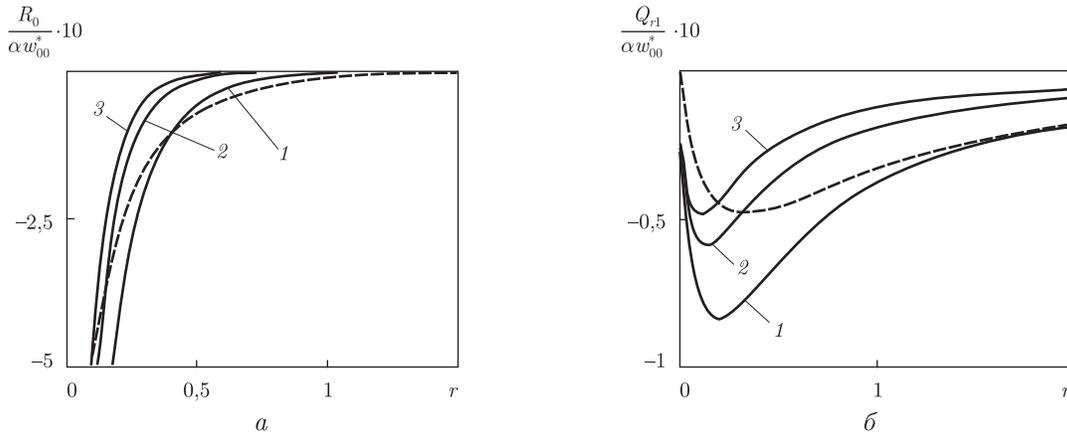


Рис. 3

щим значениям параметра E/G' : 40; 80; 120; штриховая линия соответствует изотропному материалу ($Bi = 0,001$).

Из графиков на рис. 3 следует, что параметр сдвиговой податливости оказывает влияние на поперечные касательные и нормальные напряжения. С его увеличением обобщенные усилия R_0 и Q_{r1} убывают по абсолютной величине.

Проведенные оценочные расчеты показали, что поперечные касательные напряжения могут достичь уровня допустимых напряжений при температурном воздействии большой интенсивности. Поэтому расчет анизотропных тонкостенных элементов конструкций, находящихся под действием интенсивных сосредоточенных и локальных температурных нагрузок, необходимо проводить по уточненным теориям.

1. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. – Киев: А. С. К., 1998. – 387 с. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7). – С. 159–196.
2. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
3. Гольцев А. С. Термоупругое состояние ортотропных пластин под действием сосредоточенных источников тепла при произвольном теплообмене // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2000. – Вип. 1. – С. 36–40.

4. Пелех Б. Л., Лазько В. А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
5. Пелех Б. Л., Сухорольский М. А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 216 с.
6. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Уч. пособие. – Донецк: Изд-во Донецк. гос. ун-та, 1980. – 128 с.

Донецкий национальный университет

Поступило в редакцию 10.03.2009

N. S. Bondarenko, A. S. Goltsev,
Academician of the NAS of Ukraine **V. P. Shevchenko**

A fundamental solution of {1,2}-approximation equations of a momentless thermoelastic state for transverse-isotropic plates

A thermoelastic problem for transverse-isotropic plates which are under the action of concentrated "plane" heat sources is considered. The thermoelastic equations of {1,2}-approximation which take transversal shear and normal stresses into account are used. The calculations describe the influence of heat and thermomechanical characteristics of transverse-isotropic plates on their thermoelastic state.