УДК 539.3:537.228.1

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга**

Застосування гамільтонового формалізму в теорії коливань п'єзоелектричних пластин

Система рівнянь планарних коливань п'єзоелектричних пластин в прямокутних і полярних координатах з електродованими лицьовими площинами зведена до операторної гамільтонової форми за однією з просторових координат. У випадку гармонічних неосесиметричних коливань при заданому електричному потенціалі одержані неоднорідні гамільтонові канонічні системи за радіальною координатою для кожної радіальної амплітуди.

Змішану систему рівнянь теорії пружності одного типу в прямокутних координатах в роботі [4] вперше було подано в операторній гамільтоновій формі. Цей факт має фундаментальне значення в теорії поширення хвиль в неоднорідно-періодичних середовищах [4–6]. У циліндричних координатах такі перетворення більш складні і були здійснені в роботі [1] та інших наукових роботах [6].

Нижче гамільтонів формалізм застосовано до рівнянь планарних коливань п'єзоелектричних пластин з товщинною поляризацією. Докладно розглянуто випадок неосесиметричних гармонічних коливань під дією електричної напруги.

Тонку пластину постійної товщини h віднесемо до декартової прямокутної системи координат xyz, площина $z = 0$ якої є серединною площиною пластини. Матеріал пластини належить до гексагональної системи класу $6mm$ з віссю симетрії шостого порядку z або має властивості п'єзокераміки з товщинною поляризацією.

Нехай пластина з електродованими лицьовими площинами $z = \pm h/2$ перебуває в умовах плоского напруженого стану $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$. Тоді матеріальним залежностям можна надати [2, 3] вигляду

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{1}{(1-\nu_E^2)s_{11}^E}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_E\frac{\partial v}{\partial y} - (1+\nu_E)d_{13}E_z\right),\\
\sigma_{yy} &= \frac{1}{(1-\nu_E^2)s_{11}^E}\left(\nu_E\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - (1+\nu_E)d_{13}E_z\right),\\
\sigma_{xy} &= \frac{1}{2(1+\nu_E)s_{11}^E}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),
\end{aligned} \tag{1}$$

в яких враховані формули Коші для деформацій.

Механічні напруження $\sigma_{xx}(x,y,t)$, $\sigma_{yy}(x,y,t)$, $\sigma_{xy}(x,y,t)$ і переміщення $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ задовольняють рівняння коливань

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} &= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} &= \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{2}$$

У співвідношеннях (1), (2) s_{11}^E, s_{12}^E — модулі податливості; $\nu = -s_{12}^E/s_{11}^E$, d_{13} — п'єзоелектричний модуль; ρ — густина матеріалу.

Перетворимо рівняння (1), (2) до операторної гамільтонової системи, вибравши основними невідомими функціями u, v, σ_{xx}, σ_{xy}, які повинні бути неперервними на площадках $x = \text{const}$. Одержимо

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y},\\
&\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} + 2(1+v_E)s_{11}^E \sigma_{xy},\\
&\frac{\partial u}{\partial x} = (1-v_E^2)s_{11}^E \sigma_{xx} - v_E \frac{\partial v}{\partial y} + (1+v_E)d_{13}E_z,\\
&\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = -v_E \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \frac{1}{s_{11}^E}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{d_{13}}{s_{11}^E}\frac{\partial E_z}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{3}$$

П'яте з рівнянь (1), (2) дозволяє визначити механічне напруження

$$\sigma_{yy} = -v_E \sigma_{xx} - \frac{1}{s_{11}^E}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{d_{13}}{s_{11}^E}E_z \tag{4}$$

через розв'язуючі функції σ_{xx}, v, u, σ_{xy}.

Якщо ввести вектори

$$\widehat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \widehat{q}_1 \\ \widehat{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ v \end{bmatrix}, \qquad \widehat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \widehat{p}_1 \\ \widehat{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \tag{5}$$

і симетричні операторні матриці

$$\widehat{\mathbf{Q}}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right), \qquad \widehat{\mathbf{P}}\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

з елементами

$$\begin{aligned}
&\widehat{Q}_{11} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad \widehat{Q}_{12} = \widehat{Q}_{21} = -\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \widehat{Q}_{22} = 2(1+v_E)s_{11}^E,\\
&\widehat{P}_{11} = -(1-v_E^2)s_{11}^E, \qquad \widehat{P}_{12} = \widehat{P}_{21} = v_E \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \widehat{P}_{22} = \frac{1}{s_{11}^E}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{6}$$

то систему можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \widehat{q}_i}{\partial x} = \widehat{Q}_{ik}\widehat{p}_k, \qquad \frac{\partial \widehat{p}_i}{\partial x} = -\widehat{P}_{ik}\widehat{q}_k + \left(\delta_{i1}(1+v_E) + \delta_{i2}\frac{1}{s_{11}^E}\frac{\partial}{\partial y}\right)d_{13}E_z. \tag{7}$$

Система (7) є неоднорідною операторною гамільтоновою системою по координаті x

$$\frac{\partial \widehat{q}_i}{\partial x} = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \widehat{p}_i}, \qquad \frac{\partial \widehat{p}_i}{\partial x} = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \widehat{q}_i} + \left(\delta_{i1}(1+v_E) + \delta_{i2}\frac{1}{s_{11}^E}\frac{\partial}{\partial y}\right)d_{13}E_z$$

з операторною функцією Гамільтона

$$\widehat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\widehat{\mathbf{P}}\widehat{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\widehat{\mathbf{Q}}\widehat{\mathbf{p}}.$$

Складніша реалізація гамільтонового формалізму у випадку полярних координат [1], коли механічні напруження $\sigma_{rr}(r,\theta,t)$, $\sigma_{\theta\theta}(r,\theta,t)$, $\sigma_{r\theta}(r,\theta,t)$ і переміщення $u_r(r,\theta,t)$, $u_\theta(r,\theta,t)$ задовольняють рівняння

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} = \rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{8}$$

і матеріальні залежності

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr} = \frac{1}{(1-\nu_E^2)s_{11}^E}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\right) - (1+\nu_E)d_{13}E_z\right),\\
&\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{(1-\nu_E^2)s_{11}^E}\left(\nu_E\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r} - (1+\nu_E)d_{13}E_z\right),\\
&\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2(1+\nu_E)s_{11}^E}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right),
\end{aligned} \tag{9}$$

в яких враховані формули Коші для деформацій.

Перетворимо рівняння (8), (9), вибравши основними невідомими функції u_r, u_θ, $r\sigma_{rr}$, $r\sigma_{r\theta}$. Одержимо

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} = \frac{\nu_E}{r}(r\sigma_{rr}) + \frac{1}{s_{11}^E}\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + r\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{1}{s_{11}^E}\frac{u_r}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{r\theta})}{\partial\theta} - \frac{d_{13}}{s_{11}^E}E_z,\\
&\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + 2(1+\nu_E)s_{11}^E\frac{r\sigma_{r\theta}}{r},\\
&\frac{\partial u_r}{\partial r} = (1-\nu_E^2)s_{11}^E\frac{r\sigma_{rr}}{r} - \frac{\nu_E}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} - \nu_E\frac{u_r}{r} + (1+\nu_E)d_{13}E_z,\\
&\frac{\partial(r\sigma_{r\theta})}{\partial r} = -\frac{\nu_E}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial\theta} + r\rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} - \frac{1}{s_{11}^E}\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} - \frac{1}{s_{11}^E}\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{r\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{d_{13}}{s_{11}^E}\frac{\partial E_z}{\partial\theta}.
\end{aligned} \tag{10}$$

П'яте з рівнянь (8), (9) служить для визначення механічного напруження

$$\sigma_{\theta\theta} = \nu_E\sigma_{rr} + \frac{1}{s_{11}^E}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\right) - \frac{d_{13}}{s_{11}^E}E_z \tag{11}$$

через розв'язуючі функції $r\sigma_{rr}$, u_θ, u_r і електричну напруженість E_z.

Введемо вектори

$$\widehat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix}\widehat{q}_1\\ \widehat{q}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r\sigma_{rr}\\ u_\theta\end{bmatrix}, \qquad \widehat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix}\widehat{p}_1\\ \widehat{p}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_r\\ r\sigma_{r\theta}\end{bmatrix}$$

і операторні матриці

$$\widehat{\mathbf{R}}\left(r, \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial t}\right), \qquad \widehat{\mathbf{Q}}\left(r, \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial t}\right), \qquad \widehat{\mathbf{P}}\left(r, \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

дві останні з яких симетричні, з ненульовими елементами

$$\begin{aligned}
&\widehat{R}_{11} = \frac{v_E}{r}, \qquad \widehat{R}_{12} = \frac{1}{s_{11}^E}\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \widehat{R}_{22} = \frac{1}{r},\\
&\widehat{Q}_{11} = r\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{s_{11}^E r}, \qquad \widehat{Q}_{12} = \widehat{Q}_{21} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \widehat{Q}_{22} = 2(1+v_E)\frac{s_{11}^E}{r},\\
&\widehat{P}_{11} = -(1-v_E^2)\frac{s_{11}^E}{r}, \qquad \widehat{P}_{12} = \widehat{P}_{21} = \frac{v_E}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \widehat{P}_{22} = -r\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{s_{11}^E r}\frac{\partial}{\partial\theta}.
\end{aligned} \tag{12}$$

З їх допомогою систему (10) запишемо в матричній формі

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\widehat{q}_i}{\partial r} = \widehat{R}_{ik}\widehat{q}_k + \widehat{Q}_{ik}\widehat{p}_k - \delta_{i1}\frac{d_{13}}{s_{11}^E}E_z,\\
&\frac{\partial\widehat{p}_i}{\partial r} = -\widehat{P}_{ik}\widehat{q}_k - \widehat{R}_{ki}\widehat{p}_k + \left(\delta_{i1}(1+v_E)d_{13} + \delta_{i2}\frac{d_{13}}{s_{11}^E}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)E_z.
\end{aligned} \tag{13}$$

Система (13) є неоднорідною операторною гамільтоновою системою по координаті r

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\widehat{q}_i}{\partial r} = \frac{\partial\widehat{H}}{\partial\widehat{p}_i} - \delta_{i1}\frac{d_{13}}{s_{11}^E}E_z,\\
&\frac{\partial\widehat{p}_i}{\partial x} = -\frac{\partial\widehat{H}}{\partial\widehat{q}_i} + \left(\delta_{i1}(1+v_E)d_{13} + \delta_{i2}\frac{d_{13}}{s_{11}^E}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)E_z
\end{aligned} \tag{14}$$

з операторною функцією Гамільтона

$$\widehat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\widehat{\mathbf{P}}\widehat{\mathbf{q}} + \widehat{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\widehat{\mathbf{R}}\widehat{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\widehat{\mathbf{Q}}\widehat{\mathbf{p}}. \tag{15}$$

Виконаємо в системі (10) граничний перехід до прямокутних координат. Зробимо з цією метою в системі (10) заміну змінних $r = R + x$, $R\theta = y$. Якщо перше і четверте рівняння системи (10) помножити на R і потім в усіх рівнняннях перейти до границі $R \to \infty$, то система (10) після цих операцій повністю збігається з системою (3).

Розглянемо випадок неосесиметричних гармонічних коливань $f(r,\theta,t) = \mathrm{Re}\, f^a(r,\theta) \times \times \exp i\omega t$ і покладемо

$$\begin{aligned}
&r\sigma_{rr}^a = -Rc_{00}\sum_m q_{1m}(\bar{r})\sin m\theta, \qquad u_r^a = R\sum_m p_{1m}(\bar{r})\sin m\theta,\\
&u_\theta^a = R\sum_m q_{2m}(\bar{r})\cos m\theta, \qquad r\sigma_{r\theta}^a = Rc_{00}\sum_m p_{2m}(\bar{r})\cos m\theta.
\end{aligned} \tag{16}$$

Тоді при кусково-сталому електричному потенціалі

$$E_z^a = V_0 h^{-1}\sum_m \overline{E}_m \sin m\theta$$

та $\overline{\omega} = \omega R\rho_{00}/c_{00}$, $\overline{s}_{ik}^{E} = s_{ik}^{E}c_{00}$, $r = R\overline{r}$ операторна система (14) переходить в зліченну множину канонічних гамільтонових неоднорідних систем по просторовій координаті $\overline{r}$

$$\begin{aligned}\frac{dq_{im}}{d\overline{r}} &= \frac{\partial H_m}{\partial p_{im}} - \delta_{i1}\frac{d_{31}V_0}{\overline{s}_{11}^{E}h}\overline{E}_{zm},\\ \frac{dp_{im}}{d\overline{r}} &= -\frac{\partial H_m}{\partial q_{im}} + \delta_{i1}(1+v_E)d_{13}\frac{V_0}{h}\overline{E}_{zm}\end{aligned} \tag{17}$$

з функціями Гамільтона

$$H_m = \frac{1}{2}q_{im}P_{ikm}q_{km} + p_{im}R_{ikm}q_{km} + \frac{1}{2}p_{im}Q_{ikm}p_{km}. \tag{18}$$

Ненульові елементи матриць R_{ikm}, P_{ikm}, Q_{ikm} набувають таких значень:

$$\begin{aligned}&R_{11m} = \frac{v_E}{\overline{r}}, \qquad R_{12m} = \frac{m}{\overline{s}_{11}^{E}\overline{r}}, \qquad R_{22m} = \frac{1}{\overline{r}},\\ &Q_{11m} = \overline{\rho\omega}^2\overline{r} - \frac{1}{\overline{s}_{11}^{E}\overline{r}}, \qquad Q_{12m} = Q_{21m} = -\frac{m}{\overline{r}}, \qquad Q_{22m} = \frac{2(1+v_E)\overline{s}_{11}^{E}}{\overline{r}},\\ &P_{11m} = \frac{(1-v_E^2)\overline{s}_{11}^{E}}{\overline{r}}, \qquad P_{12m} = P_{21m} = -\frac{mv_E}{\overline{r}}, \qquad P_{22m} = -\overline{\rho\omega}^2\overline{r} - \frac{m^2}{s_{11}^{E}\overline{r}}.\end{aligned} \tag{19}$$

Рівняння (18) замикаються відповідними граничними умовами при $r = r_0$ і $r = r_1$; при $r = r_0 = 0$ на розв'язок треба накласти умови обмеженості в точці $r = 0$.

1. *Шульга В. М.* До розв'язку рівнянь теорії пружності в циліндричних координатах // Доп. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 80–82.
2. *Шульга М. О.* До теорії електромеханічних неосесиметричних коливань п'єзокерамічних пластин з товщинною поляризацією // Системні технології. – 2007. – Вип. 4 (51). – С. 39–43.
3. *Шульга М. О., Карлаш В. Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 2008. – 270 с.
4. *Шульга Н. А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наук. думка, 1981. – 200 с.
5. *Шульга Н. А.* Распространение упругих волн в периодически-неоднородных средах // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 7. – С. 15–56.
6. *Шульга Н. А.* Распространение связанных волн в периодически-неоднородных средах при взаимодействии с электромагнитным полем // Там же. – № 10. – С. 38–68.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Надійшло до редакції 19.02.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. O. Shul'ga**

Application of the Hamilton formalism to the theory of vibrations of piezoelectric plates

A system of equations for planar vibrations of piezoelectric plates with the electroded facial surfaces in rectangular and polar coordinates is reduced to the operator form for one of the spatial coordinates. In the case of harmonic non-axisymmetric vibrations at the given electric potential, the Hamilton (canonical) systems in a radial coordinate for every radial amplitude are got.