УДК 517.95+511.2

Член-кореспондент НАН України **Б. Й. Пташник, К. С. Галун**

Багатоточкова задача для факторизованих гіперболічно-параболічних операторів

У циліндричній області досліджено коректність задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною та умовами типу Діріхле за просторовими координатами для диференціального оператора, що є добутком гіперболічних та параболічних операторів зі змінними коефіцієнтами. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід.

Задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною для рівнянь із частинними похідними досліджувались у багатьох роботах (див., наприклад, [1–5] та бібліографію в них). Такі задачі, взагалі, є умовно коректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників.

Дана робота розвиває результати, сформульовані в [6], де вперше розглянуто задачу з багатоточковими умовами для гіперболічно-параболічних рівнянь. У ній досліджено однозначну розв'язність у циліндричній області задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною та умовами типу Діріхле за просторовими координатами для диференціального оператора, що є добутком гіперболічних та параболічних операторів зі змінними за x коефіцієнтами.

1. В області $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{N+1} \colon t \in (0,T) \subset \mathbb{R}^1,\ x \in Q \subset \mathbb{R}^N\}$, де Q — однозв'язна обмежена відкрита область з гладкою межею Γ, розглянемо задачу

$$\mathcal{L}u \equiv \prod_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_s^2 L\right)\prod_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b_s^2 L\right)u(t,x) = \Phi(t,x), \qquad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$u(t_j,x) = \varphi_j(x), \qquad t_j = (j-1)t_0, \qquad j = 1,\ldots,m+2n, \qquad x \in \overline{Q}, \tag{2}$$

$$L^p u\big|_{\Sigma} = 0, \qquad p = 0,1,\ldots,m+n-1, \qquad \Sigma = \Gamma \times [0,T], \tag{3}$$

де $t_0 = T/(m+2n-1)$, $0 < a_s < a_q$, $1 \leqslant s < q \leqslant m$, $0 < b_s < b_q$, $1 \leqslant s < q \leqslant n$, а диференціальний вираз $L := \sum\limits_{i,j=1}^{N} \partial[h_{ij}(x)\partial/\partial x_j]/\partial x_i - c(x)$ — еліптичний в області $\overline{Q}$ [7], $L^q u = L^{q-1}(Lu)$, $L^0 u = u$.

2. Позначимо через $C^{s+\mu}$, $0 < \mu < 1$, клас функцій, визначених і неперервних в області $\overline{Q}$, s-ті похідні яких задовольняють в $\overline{Q}$ умову Гельдера з показником μ. Припустимо, що Q — відкрита нормальна область (в якій задача Діріхле для рівняння Лапласа є розв'язною при довільній неперервній крайовій функції) така, що $\overline{Q} \in A^{2(m+n)+\mu}$, де $A^{s+\mu}$ — клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать класу $C^{s+\mu}$; $h_{ij}(x) \in C^{2(m+n)-1+\mu}(\overline{Q})$, $c(x) \in C^{2(m+n-1)+\mu}(\overline{Q})$, $c(x) \geqslant 0$. За вказаних припущень задача про власні значення

$$LX + \lambda X = 0, \qquad x \in \overline{Q}; \qquad X\big|_{\Gamma} = 0 \tag{4}$$

має повну ортонормовану систему власних функцій $\mathcal{X} = \{X_k(x), k \in \mathbb{N}\}$ і нескінченну множину власних значень $\Lambda = \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ (будемо вважати, що множина Λ є впорядкованою так, що кожній власній функції $X_k(x)$ відповідає одне і лише одне власне значення $\lambda_k \in \Lambda$ [8]); при цьому справджуються такі оцінки [7, 9]:

$$C_0 k^{2/N} \leqslant \lambda_k \leqslant C_1 k^{2/N}, \qquad C_0 \leqslant C_1, \qquad \lambda_k \in \Lambda; \tag{5}$$

$$\max_{x \in \overline{Q}} \left| \frac{\partial^{|s|} X_k(x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}} \right| \leqslant C_2 \lambda_k^{\frac{N}{4} + \frac{|s|}{2}}, \qquad C_2 = C_2(|s|) > 0, \qquad |s| = 0, 1, \ldots, 2(m+n). \tag{6}$$

В (5), (6) і всюди далі через C_j, $j = 0, 1, \ldots, 10$, позначено додатні сталі, що не залежать від k.

Відтак, диференціальний вираз L породжує шкалу гільбертових просторів $\{H_q(Q), q \in \in \mathbb{Z}_+\}$ функцій

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x), \qquad x \in \overline{Q}, \qquad \varphi_k = \int\limits_Q \varphi(x) X_k(x)\, dx, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

зі скінченними нормами $\|\varphi\|^2_{H_q(Q)} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k)^q \varphi_k^2$. Зауважимо, що простір $H_q(Q)$ збігається (має одні й ті ж самі класи еквівалентності) із замиканням за нормою простору Соболєва $W_2^q(Q)$ [10] сукупності всіх q раз неперервно диференційовних в області Q функцій $\varphi(x)$, для яких поблизу границі Γ області Q $L^p\varphi = 0$, $0 \leqslant p \leqslant [(q-1)/2]$.

Диференціальний вираз L породжує також шкалу банахових просторів $\{C_0^q(\overline{Q}), q \in \mathbb{Z}_+\}$ функцій (7), які визначені і неперервні в області $\overline{Q}$ разом з усіма похідними до порядку q включно і для яких виконуються співвідношення $L^p\varphi\big|_\Gamma = 0$, $0 \leqslant p \leqslant [(q-1)/2]$, з нормами [5]

$$\|\varphi\|_{C_0^q(\overline{Q})} = \sum_{0 \leqslant |s| \leqslant q} \max_{x \in \overline{Q}} \left| \frac{\partial^{|s|}\varphi}{\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_N^{s_N}} \right|. \tag{8}$$

Причому $C_0^q(\overline{Q}) \subset C^q(\overline{Q})$, $C_0^q(\overline{Q}) \subset H_q(Q)$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Аналогічно вводиться шкала банахових просторів $\{C_0^{l,q}(\overline{D}),\ l, q \in \mathbb{Z}_+,\ l \leqslant q\}$ функцій

$$\psi(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) X_k(x), (t,x) \in \overline{D}, \qquad \psi_k(t) = \int\limits_Q \psi(t,x) X_k(x)\, dx, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

таких, що похідні $\partial^r\psi(t,x)/\partial t^r$, $r = 0, 1, \ldots, l$, визначені та неперервно диференційовні за x в області $\overline{D}$ до порядку $q - r$ включно та виконуються співвідношення $L^p\psi\big|_\Sigma = 0$, $0 \leqslant p \leqslant \leqslant [(q-1)/2]$, з нормами

$$\|\psi\|_{C_0^{l,q}(\overline{D})} = \sum_{\substack{0 \leqslant r + |s| \leqslant q \\ 0 \leqslant r \leqslant l}} \max_{(t,x) \in \overline{D}} \left| \frac{\partial^{r+|s|}\psi}{\partial t^r \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_N^{s_N}} \right|, \tag{10}$$

причому $C_0^{l,q}(\overline{D}) \subset C^{l,q}(\overline{D})$, $l, q \in \mathbb{Z}_+$.

Для функцій (7) і (9) розглянемо, відповідно, класи многовидів

$$\mathcal{E}_{\gamma,l}(\overline{Q}) = \left\{\varphi(x)\colon \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^l e^{\gamma\lambda_k} |\varphi_k| < \infty,\ x \in \overline{Q}\right\}, \qquad l \in \mathbb{R}_+, \qquad \gamma > 0,$$

$$\mathcal{F}_{\gamma,l}(\overline{D}) = \left\{\psi(t,x)\colon \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^l e^{\gamma\lambda_k} \max_{t\in[0,T]} |\psi_k(t)| < \infty, (t,x) \in \overline{D}\right\}, \qquad l \in \mathbb{R}_+, \qquad \gamma > 0.$$

3. Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \tag{11}$$

де коефіцієнти $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, є розв'язками зліченного класу таких багатоточкових задач для звичайних диференціальних рівнянь:

$$\prod_{s=1}^{m}\left(\frac{d}{dt} + a_s^2\lambda_k\right) \prod_{s=1}^{n}\left(\frac{d^2}{dt^2} + b_s^2\lambda_k\right) u_k(t) = \Phi_k(t), \qquad t \in (0,T), \qquad \lambda_k \in \Lambda, \tag{12}$$

$$u_k(t_j) = \varphi_{jk}, \qquad t_j = (j-1)t_0, \qquad j = 1,\ldots,m+2n. \tag{13}$$

Тут φ_{jk} і $\Phi_k(t)$ є коефіцієнтами розвинення функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,m+2n$, та $\Phi(t,x)$, відповідно, в ряди Фур'є за системою власних функцій $\mathcal{X}$. Фундаментальна система розв'язків рівняння (12) складається з таких функцій: $V_{ks}(t) = e^{-a_s^2\lambda_k t}$, $s = 1,\ldots,m$; $V_{ks}(t) = e^{ib_{s-m}\sqrt{\lambda_k}t}$, $s = m+1,\ldots,m+n$; $V_{ks}(t) = e^{-ib_{s-m-n}\sqrt{\lambda_k}t}$, $s = m+n+1,\ldots,m+2n$, а характеристичний визначник $\Delta_k(\lambda_k)$ [11] задачі (12), (13) обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = \prod_{h=1}^{m-1} \frac{\eta_h(\lambda_k)}{E(\lambda_k)} \prod_{l=1}^{n} \sin b_l\sqrt{\lambda_k}t_0 \prod_{1\leqslant q<p\leqslant n} \sin^2\frac{b_p+b_q}{2}\sqrt{\lambda_k}t_0 \sin^2\frac{b_p-b_q}{2}\sqrt{\lambda_k}t_0, \tag{14}$$

де $\eta_h(\lambda_k) = \exp\{-(m-h)a_h^2\lambda_k t_0\}$, $C_3 \leqslant |E(\lambda_k)| \leqslant C_4$ для всіх $\lambda_k \in \Lambda$.

Задача (1)–(3) не може мати двох різних розв'язків тоді і тільки тоді, коли $\Delta(\lambda_k) \neq 0$ [11]. Позначимо $\beta_r = b_r t_0$, $r = 1,\ldots,n$.

Теорема 1. *Для единості розв'язку задачі* (1)–(3) *в просторі* $C^{m+2n,2(m+n)}(\overline{D})$ *необхідно і досить, щоб для всіх* $\lambda_k \in \Lambda$ *і для всіх* p, $q \in \mathbb{N}$ *виконувались умови*

$$\beta_r\sqrt{\lambda_k} \neq p\pi, \qquad r = 1,\ldots,n; \qquad (\beta_l \pm \beta_j)\sqrt{\lambda_k} \neq 2q\pi, \qquad 1 \leqslant j < l \leqslant n. \tag{15}$$

Доведення випливає з (14) і проводиться за схемою доведення теореми 7.5 в [5].

Зауваження. Умови (15) виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$.

За умов теореми 1 розв'язок задачі (1)–(3) формально зображується рядом (11), в якому

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau)\Phi_k(\tau)d\tau + \sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{m+2n} \alpha_{sj}(\lambda_k)A_{kjs}\varphi_{jk}e^{-a_s^2\lambda_k t} +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{B_{kl}\sin b_l\sqrt{\lambda_k}t+D_{kl}\cos b_l\sqrt{\lambda_k}t}{\sin b_l\sqrt{\lambda_k}t_0}\prod_{\substack{q=1\\q\neq l}}^{n}\sin\frac{b_l-b_q}{2}\sqrt{\lambda_k}t_0\sin\frac{b_l+b_q}{2}\sqrt{\lambda_k}t_0, \tag{16}$$

$$A_{kjs}=\begin{cases}\exp\left\{\lambda_k t_0\left[a_s^2(m-s)-\sum\limits_{h=s+1}^{m-j+1}a_h^2\right]\right\}, & 1\leqslant j\leqslant m-s+1,\\ \exp\left\{\lambda_k t_0\left[a_s^2(m-s)+\sum\limits_{h=m-j+1}^{s-1}a_h^2\right]\right\}, & m-s+2\leqslant j\leqslant m-1,\\ \exp\left\{\lambda_k t_0\left[a_s^2(m-s)+\sum\limits_{h=1}^{s-1}a_h^2\right]\right\}, & m\leqslant j\leqslant m+2n,\end{cases} \tag{17}$$

де функції $\alpha_{sj}(\lambda_k)$ рівномірно обмежені для всіх $\lambda_k\in\Lambda$; B_{kl}, D_{kl} — лінійні комбінації чисел $\varphi_{jk}(x)$, $j=1,\ldots,m+2n$, з рівномірно обмеженими для всіх $\lambda_k\in\Lambda$ коефіцієнтами; функції Гріна $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbb{N}$, задачі (12), (13) у квадраті $\mathcal{K}=\{(t,\tau)\colon 0\leqslant t\leqslant T, 0\leqslant\tau\leqslant T\}$ (крім відрізків прямих $\tau=(j-1)t_0$, $j=1,\ldots,m+2n$) визначаються формулами [2, 5, 11]

$$G_k(t,\tau)=g_k(t,\tau)+\sum_{j=1}^{m+2n}g_k((j-1)t_0,\tau)\left[\sum_{s=1}^{m}I_{sj}(\lambda_k)A_{kjs}e^{-a_s^2\lambda_k t}+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{n}\frac{J_{sj}^{*}(\lambda_k)\cos b_s\sqrt{\lambda_k}t+J_{sj}^{**}(\lambda_k)\sin b_s\sqrt{\lambda_k}t}{\sin b_s\sqrt{\lambda_k}t_0\prod\limits_{\substack{l=1\\l\neq s}}^{n}\sin\frac{b_s-b_l}{2}\sqrt{\lambda_k}t_0\sin\frac{b_s+b_l}{2}\sqrt{\lambda_k}t_0}\right],\qquad k\in\mathbb{N}, \tag{18}$$

$$g_k(t,\tau)=\frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2}\left\{\frac{1}{\lambda_k^{m+2n-1}}\sum_{s=1}^{m}M_s(\lambda_k)e^{-a_s^2\lambda_k(t-\tau)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_k^{m+n-1/2}}\sum_{s=1}^{n}[B_s^{*}(\lambda_k)\cos b_s\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)+B_s^{**}(\lambda_k)\sin b_s\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)]\right\}, \tag{19}$$

де $I_{sj}(\lambda_k)$, $J_{sj}^{*}(\lambda_k)$, $J_{sj}^{**}(\lambda_k)$, $M_s(\lambda_k)$, $B_s^{*}(\lambda_k)$, $B_s^{**}(\lambda_k)$ — рівномірно обмежені для всіх $\lambda_k\in\Lambda$. На прямих $\tau=(j-1)t_0$, $j=1,\ldots,m+2n-1$, функції $G_k(t,\tau)$ доозначуємо за неперервністю справа, а на прямій $\tau=T$ — за неперервністю зліва.

4. Для дослідження умов існування класичного розв'язку задачі (1)–(3) потрібні такі леми.

Лема 1. *Якщо* $\varphi(x)\in C_0^q(\overline{Q})$, $q\in\mathbb{Z}_+$, *то* $|\varphi_k|\leqslant C_5\|\varphi\|_{C_0^q(\overline{Q})}\lambda_k^{-q/2}$, $k\in\mathbb{N}$.

Доведення. Враховуючи, що $C_0^q(\overline{Q})\subset H_q(Q)$, $q\in\mathbb{Z}_+$, та застосовуючи першу та другу формули Гріна [7], можна показати справедливість таких інтегральних тотожностей:

$$\int_Q\varphi L^pX_k dx=\int_Q X_kL^p\varphi dx,\qquad \varphi\in C_0^{2p}(\overline{Q}); \tag{20}$$

$$\lambda_k \int\limits_Q \varphi L^p X_k dx = \int\limits_Q \left(\sum_{i,j=1}^{N} h_{ij} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial (L^p \varphi)}{\partial x_j} + c X_k L^p \varphi \right) dx, \qquad \varphi \in C_0^{2p+1}(\overline{Q}), \tag{21}$$

де $p \in \mathbb{Z}_+$. Із (7), (20), (21) та нерівності Коші–Буняковського [8] випливають оцінки

$$\varphi_k^2 \leqslant C_5 \|\varphi\|^2_{C_0^{2p}(\overline{Q})} \lambda_k^{-2p}, \qquad \varphi \in C_0^{2p}(\overline{Q}), \tag{22}$$

$$\varphi_k^2 \leqslant \frac{\|\varphi\|^2_{C_0^{2p+1}(\overline{Q})}}{\lambda_k^{2p+2}} \left[C_6 + C_7 \sum_{i=1}^{N} \int\limits_Q \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right)^2 dx \right], \qquad \varphi \in C_0^{2p+1}(\overline{Q}). \tag{23}$$

Внаслідок еліптичності диференціального виразу L, із (21) при $\varphi(x) = X_k(x)$ випливає нерівність

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_Q \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right)^2 dx \leqslant C_8 \lambda_k.$$

Враховуючи останню нерівність, із (23) отримуємо, що

$$\varphi_k^2 \leqslant \lambda_k^{-(2p+2)} \|\varphi\|^2_{C_0^{2p+1}(\overline{Q})} [C_6 + C_9 \lambda_k] \leqslant C_5 \lambda_k^{-(2p+1)} \|\varphi\|^2_{C_0^{2p+1}(\overline{Q})}, \qquad \varphi \in C_0^{2p+1}(\overline{Q}). \tag{24}$$

Із оцінок (22), (24) випливає доведення леми.

Лема 2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^1$) чисел $\beta > 0$ нерівність*

$$|\sin \beta \sqrt{\lambda_k}| \geqslant C_{10} \lambda_k^{-(N+\varepsilon)/2}, \qquad 0 < \varepsilon < 1, \qquad C_{10} = C_{10}(\beta), \tag{25}$$

справджується для всіх (крім скінченної кількості) $\lambda_k \in \Lambda$.

Доведення грунтується на очевидній нерівності $|\sin x| \geqslant (2/\pi)|x|$ при $|x| < \pi/2$, оцінках (5) та лемі 2.4 з [2, гл. 1].

Зі співвідношень (5), (6), (8), (10), (11), (16)–(19) та лем 1, 2 випливають такі твердження.

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* (15) *і* $m = 1$. *Якщо* $\Phi(t,x) \in C_0^{0,s}(\overline{D})$, $s = \max\{1, 2n(N-1) - N\} + 2 + 2n + [3N/2]$, $\varphi_j(x) \in C_0^q(\overline{Q})$, $q = (2n-1)N + [3N/2] + 4n + 3$, $j = 1, \dots, 2n+1$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів* $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ *існує розв'язок задачі* (1)–(3), *який належить до простору* $C^{1+2n, 2(n+1)}(\overline{D})$ *і неперервно залежить від функцій* $\Phi(t,x)$, $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, 2n+1$.

Теорема 3. *Нехай справджуються умови* (15) *і* $m \geqslant 2$. *Якщо* $\Phi(t,x) \in \mathcal{F}_{\gamma_m, r}(\overline{D})$, $\gamma_m = \sum\limits_{h=1}^{m-1} a_h^2 t_0$, $r = N/4 + m/2 + n + 1/2$, $\varphi_1(x) \in C_0^q(\overline{Q})$, $q = \max\{m, (2n-1)N\} + [3N/2] + 2m + 4n + 1$, $\varphi_j(x) \in \mathcal{E}_{\gamma_j, l}(\overline{Q})$, $\gamma_j = \sum\limits_{h=m-j+1}^{m-1} a_h^2 t_0$, $l = N/4 + 3m/2 + 2n$, $j = 2, \dots, m-1$, $\varphi_j(x) \in \mathcal{E}_{\gamma_m, l}(\overline{Q})$, $j = m, \dots, m+2n$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів* $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ *існує розв'язок задачі* (1)–(3), *який належить до простору* $C^{m+2n, 2(m+n)}(\overline{D})$.

Аналогічні результати отримано для випадку, коли в рівнянні (1) $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = a$, $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b$.

Результати роботи можна поширити на випадок оператора

$$\mathcal{L}u \equiv \prod_{s=1}^{l}\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_s^2 L\right)^{q_s} \prod_{s=1}^{p}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b_s^2 L\right)^{r_s}, \qquad q_1 + \cdots + q_l = m, \qquad r_1 + \cdots + r_p = n.$$

1. *Антыпко И. И., Перельман М. А.* О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. – 1972. – Вып. 16. – С. 98–109.
2. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
3. *Василишин П. Б.* Багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними: Автореф. дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 2001. – 20 с.
4. *Симотюк М. М.* Багатоточкові задачі для лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними: Автореф. дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2005. – 17 с.
5. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 415 с.
6. *Галун К. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для гіперболічно-параболічних рівнянь у циліндричній області // Матеріали Дванадцятої міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. – С. 82.
7. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**. – С. 883–896.
8. *Ильин В. А., Позняк Е. Г.* Основы математического анализа. Ч. II. – Москва: Наука, 1973. – 448 с.
9. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – Москва: Наука, 1976. – 391 с.
10. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Москва: Наука, 1988. – 333 с.
11. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.

Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів

Надійшло до редакції 16.02.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **B. Yo. Ptashnyk, K. S. Galun**

Multipoint problem for factorized hyperbolic-parabolic operators

The correctness of a problem with multipoints conditions on the time variable and conditions of the Dirichlet type on spatial coordinates for a differential operator which is a product of hyperbolic and parabolic operators with variable coefficients in a cylindrical domain is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem are established. For the lower estimates of small denominators, which arose during the construction of a solution of the problem, the metric approach is used.