ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2009

УДК 004.932.2:004.92

Член-кореспондент НАН України **В. В. Грицик, О. М. Березький**

Методи і алгоритми аналізу та синтезу складних зображень на основі теоретико-групового підходу

Запропоновано теоретико-груповий підхід до аналізу та синтезу складних зображень. Це дозволило з одного теоретичного підходу описувати, ефективно зберігати, аналізувати і синтезувати різні класи зображень. Запропоновані алгоритми реалізовано в середовищі програмування Visual C++Express Edition з використанням відкритої бібліотеки функцій комп'ютерного зору OpenCV.

Симетрія — це фундаментальна властивість природи [1]. В широкому значенні симетрія — це краса, гармонія природи, а у вузькому — це строге геометричне поняття. У комп'ютерному зорі задачі аналізу і синтезу симетричних й асиметричних структур є актуальними.

У загальному випадку алгоритми синтезу зображень можна розділити на два класи. Методи першого класу базуються на використанні зразка, який є текстурним елементом (растровим зображенням) [2]. Методи другого класу грунтуються на функціональному (або процедурному) підході до синтезу зображення [3]. Вони використовують функції (алгоритми, процедури) з метою побудови зображення. Широке застосування теорія симетрії знайшла в мистецтві для синтезу орнаментів [4, 5], що мають регулярну структуру. Інші дослідження показали, що теорію кристалографічних груп можна використати для синтезу квазірегулярних і нерегулярних структур [6].

Для аналізу зображень використовують різноманітні методи з теорії розпізнавання образів: статистичні і структурні [7], алгебраїчні і геометричні методи і методи, які базуються на нейронних мережах. Найприйнятнішими методами для аналізу симетричних та асиметричних зображень, на наш погляд, є структурні, що використовують групи симетрії.

У даній роботі пропонується теоретико-груповий підхід, який базується на теорії кристалографічних груп, що дозволяє з єдиних теоретичних позицій будувати алгоритми синтезу та аналізу складних зображень [8].

1. Основні положення теоретико-групового підходу. Наведемо необхідні відомості з теорії груп. Група — це деяка множина G, разом з заданою на ній бінарною операцією (позначається, як правило, мультиплікативно: $(g, h) \to gh$, що задовольняє умови [9]:

1) (асоціативність): $(xy)z = x(yz)$;

2) (існування нейтрального елемента): існує $e \in G$: $ex = xe = x$;

3) (існування оберненого елемента): для кожного x існує x^{-1} такий, що $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

Нехай G — група. Підмножину $H \subseteq G$ називають підгрупою, якщо $gh \in H$, $g^{-1} \in H$, для кожних g, $h \in H$.

Група G називається дискретною, якщо виконано умову: існує $C > 0$ таке, що для кожного $x \in \mathbf{R}^n$ і кожного $g \in G$, $g \neq e$, $\|x - gx\| > C$.

Кристалографічні групи [9] — це дискретні групи рухів евклідового простору, що мають обмежену фундаментальну область.

Теорема [10]. *В* $\mathbf{R}^2$ *існує 17 кристалографічних груп з точністю до еквівалентності.*

Смугою називаємо множину $S_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |y| \leqslant 1\}$.

Теорема [10]. *В* $\mathbf{R}$ *існує 7 різних груп.*

Якщо G, H — групи, то відображення $f\colon G \to H$ називають гомоморфізмом, якщо $f(g_1, g_2) = f(g_1)f(g_2)$ для кожних g_1, $g_2 \in G$. Якщо при цьому f взаємно однозначне відображення, то f називають ізоморфізмом, а групи G, H — ізоморфними.

Теорема [9]. *Підгрупа паралельних переносів є нормальною підгрупою в кристалографічній групі* G*. Ця група дорівнює своєму централізаторові і ізоморфна групі* $\mathbf{Z}^n$ *цілочисельних векторів в* $\mathbf{R}^n$*.*

Для нормальної підгрупи $H \subset G$ розглянемо сім'ю суміжних класів, тобто сім'ю $\{gH \mid g \in G\}$. Якщо така сім'я скінченна, то підгрупу H називають підгрупою скінченного індексу в G. Відомо, що підгрупа L трансляцій (лінійних переносів) є підгрупою скінченного індексу в кристалографічній групі G.

Отже, в кристалографічних групах смуги та площини можна виділити підгрупи трансляцій. Ці групи є одновимірними та двовимірними відповідно.

Відомо [9], що існує підгрупа H групи G така, що виконані умови:

1) L — нормальна підгрупа в G;

2) кожен елемент g групи G однозначно зображується у вигляді добутку $g = lh$, де $l \in L$, $h \in H$;

3) виконується умова $hLh^{-1} = L$ для кожного $h \in H$.

У цьому випадку застосовують позначення $G = L \times H$ і кажуть, що G є напівпрямим добутком L і H. Фундаментальну область групи L називають рапортом.

2. Метод синтезу симетричних зображень. Складними назвемо зображення, які мають певну структуру і будуються на основі менш структурованих зображень. До складних плоских зображень будемо відносити класи симетричних зображень, побудованих на основі груп симетрії на смузі та площині. Інший великий клас складних зображень представлено асиметричними зображеннями, що отримуються на основі симетричних.

Нехай задане поле зору $F = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant N, 0 \leqslant y \leqslant m\}$. Визначимо елементарне зображення Im_e як найменшу несиметричну частину поля зору F, $\mathrm{Im}_e \subset F$. Над заданим зображенням можна виконати геометричні перетворення (паралельний перенос, центральну симетрію, осьову симетрію, ковзне відображення і поворот). Множини, які будуються на основі приведених геометричних перетворень $T_1, T_2, \ldots, T_n$, утворюють групи перетворень. Роль операції множення виконує композиція перетворень. Для того щоб певна множина геометричних перетворень була групою, необхідно і достатньо виконання аксіом абстрактної групи перетворень.

Рапортом Rp назвемо зображення, отримане з елементарного рисунку шляхом застосування комбінацій геометричних перетворень

$$S(\mathrm{Im}_e) = Rp = \{S(x, y) \mid (x, y) \in \mathrm{Im}_e\}, \qquad \mathrm{Im}_s \subset Rp \subset F.$$

Симетричним назвемо зображення, отримане в результаті паралельних переносів рапорту вздовж осі OX (для смуги) і осей OX і OY (для площини)

$$\mathrm{Im}_s = L(Rp) = \{L(x,y) \mid (x,y) \in Rp\}, \qquad Rp \subset \mathrm{Im}_s \subset F.$$

Метод синтезу симетричних зображень базується на алгоритмах опису елементарних зображень, алгоритмах формування рапортів груп симетрії і їх трансляцій на смузі або площині.

Отже, під час синтезу необхідно сформувати елементарне зображення, використавши при цьому мову граматики, над яким виконати породжуючі перетворення, що синтезують рапорт і, зробивши паралельні переноси в одному або в двох напрямах (смуга, площина), отримати симетричне зображення [4, 11].

Синтез симетричного зображення передбачає зберігання відстаней у відповідних точках при геометричних перетвореннях в рапорті і при його паралельних переносах. Рівняння породження симетричного зображення в операторній формі наведемо таким чином:

$$\mathrm{Im}_s = L_{x,y}(R_n(R_{n-1}(\ldots R_1(\mathrm{Im}_e)))),$$

$L_{x,y}$ — оператор трансляцій вздовж осей OX та OY; R_1, R_2, $\ldots$, R_n — оператори породжуючих перетворень під час формування рапорту Rp. Елементарний рисунок будується з використанням мови, яка грунтується на основі запропонованої граматики [4].

Плоскі групи, згідно з міжнародною системою позначень кристалографічних груп [12], є такі: для смуги $\{p1, pg, p1m, p2, pmg, pm, pmm\}$ і площини $\{p1, p2, pg, cm, pm, pmm, pmg, pgg, p4, p4g, p3, cmm, p4m, p31m, p3m1, p6, p6m\}$.

Компактно симетричне зображення можна подати в матричній формі, використавши матричне представлення породжуючих перетворень [13]. В загальному випадку безвідносно до групи симетрії рівняння симетричного зображення має вигляд:

$$\mathrm{Im}_s = T_L[T_n(T_{n-1}(T_{n-2}\ldots T_1(X)))],$$

де X — координатний вектор елементарного рисунку; T_1, T_2, $\ldots$, T_n — матриці породжуючих перетворень рапорту; T_L — матриця трансляцій вздовж OX та OY.

3. Метод синтезу асиметричних зображень. Для одержання асиметричних зображень використаємо симетричні із спотворенням параметрів формування їх складових. Спотворення — це цілеспрямоване неізометричне перетворення параметрів формування групи симетрії.

Спотворення може бути структурне і параметричне. Структурне спотворення змінює вид перетворення симетрії. Параметричне спотворення змінює значення параметрів (в допустимих межах) за збереження виду симетрії. Розглядатимемо лише параметричні спотворення. Введемо наступні види спотворень: D_m — зміна масштабу елементарного рисунку (однорідне масштабування); D_x — зміщення по OX; D_y — зміщення по OY; D_{R_α} — поворот на кут α; $D_{x,y}$ — зміщення вздовж осей OX і OY; D_{x,y,R_α} — зміщення вздовж осей OX та OY і поворот на кут α; D_{m,R_α} — зміна масштабу і поворот на кут α; D_γ — зміщення в напрямку $(\cos\gamma, \sin\gamma)$; D_{x,y,m,R_α} — зміщення вздовж осей OX та OY, зміна масштабу і поворот на кут α. Перелічені спотворення, що відносяться до рапорту, позначимо через D_{R_p}. Для спотворення трансляцій рапорту в загальному випадку може використовуватися довільна функція $f(x,y)$, тобто $D_{f(x,y)}$, яку позначимо через D_L.

Асиметричне зображення Im_{as} — це зображення, яке отримано із симетричного шляхом спотворення параметрів його формування. Це означає, що відстань між відповідними точками асиметричного зображення не є константою, а може бути задана в загальному випадку у вигляді функції.

Враховуючи введені спотворення, рівняння породження асиметричного зображення для загального випадку в операторні формі можна подати так:

$$\mathrm{Im}_{as} = D_{f(x,y)} L_{x,y}(D_{x,y} D_{R,\alpha} R_n(R_{n-1}(\ldots R_1(D_m \mathrm{Im}_e)))).$$

Відповідно в матричному вигляді:

$$\mathrm{Im}_{as} = T_L D_L [T_n D_{Rp_n}(T_{n-1} D_{Rp_{n-1}}(T_{n-2} D_{Rp_{n-2}} \ldots T_1 D_{Rp_1}(X D_m)))].$$

Тому введемо асиметрію першого виду, за якої порушується ізометрія при паралельних переносах рапорту, що виражається рівняннями в операторному

$$\mathrm{Im}_{as} = D_{f(x,y)} L_{x,y}(R_n(R_{n-1}(\ldots R_1(\mathrm{Im}_e))))$$

і в матричному

$$\mathrm{Im}_{as} = T_L D_L [T_n(T_{n-1}(T_{n-2} \ldots T_1(X)))]$$

виглядах.

Асиметрія другого виду передбачає зміщення і повороти між елементарними рисунками при побудові рапорту. Відповідні рівняння мають вигляд:

$$\mathrm{Im}_{as} = D_{f(x,y)} L_{x,y}(D_{x,y} D_{R,\alpha} R_n(R_{n-1}(\ldots R_1(D_m \mathrm{Im}_e))));$$

$$\mathrm{Im}_{as} = T_L [T_n D_{R_{p_n}}(T_{n-1} D_{R_{p_{n-1}}}(T_{n-2} D_{R_{p_{n-2}}} \ldots T_1 D_{R_{p_1}}(X)))].$$

Асиметрія третього виду зберігає ізометрію при побудові рапортів і при їх трансляціях, але змінює (масштабує елементарне зображення), що виражається рівняннями

$$\mathrm{Im}_{as} = L_{x,y}(R_n(R_{n-1}(\ldots R_1(D_m \mathrm{Im}_e))));$$

$$\mathrm{Im}_{as} = T_L [T_n(T_{n-1}(T_{n-2} \ldots T_1(X D_m)))].$$

Крім того, можливі різні комбінації базових асиметричних структур, які дозволяють одержати різні класи складних зображень.

4. Метод аналізу симетричних зображень. Як показано вище, рівняння симетричного зображення в матричній формі має вигляд

$$\mathrm{Im}_s = T_L [T_n(T_{n-1}(T_{n-2} \ldots T_1(X)))].$$

Оскільки кожну кристалографічну групу можна зобразити у вигляді напівпрямого добутку $G = L \times H$, де H — рапорт; L — підгрупа трансляцій, то виділимо рапорти для груп смуги і площини. В загальному випадку рапорт можна навести в матричній формі

$$Rp = T_n(T_{n-1}(T_{n-2} \ldots T_1(X))),$$

де X — координатний вектор елементарного рисунку; $T_1, T_2, \ldots, T_n$ — матриці породжуючих перетворень рапорту. Матриці породжуючих перетворень для груп смуги та площини наведені в роботі [8].

На основі виділених породжуючих перетворень розробимо алгоритми ідентифікації груп симетрії на смузі та площині. Початковими умовами для даних алгоритмів є такі: Im_e — елементарний рисунок; T_{ij} — породжуюче перетворення від i-го до j-го елементарних рисунків.

Виділимо в смузі чотири елементарних рисунки, на площині — шість. Алгоритм для ідентифікації груп смуги такий:

1) ідентифікуємо чотири елементарних рисунки;
2) визначаємо перетворення T_{12};
3) визначаємо перетворення T_{23};
4) якщо $T_{12} = T_{23}$, то ідентифікуємо групи з множини $\{p1, pg, p1m, p2\}$;
5) якщо $T_{12} \neq T_{23}$, то визначаємо T_{34};
6) якщо $T_{12} = T_{34}$, то ідентифікуємо групи з множини $\{pmg, pm, pmm\}$.

Алгоритм ідентифікації груп площини такий: якщо в матриці перетворень

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$$

не для всіх перетворень $n = 0$, то це є група площини.

1. Ідентифікуємо шість елементарних рисунків.
2. Визначаємо перетворення T_{12}.
3. Визначаємо перетворення T_{23}.
4. Якщо $T_{12} = T_{23}$, то ідентифікуємо групи з множини $\{p1, p2, pg, cm\}$.
5. Якщо $T_{12} \neq T_{23}$, то визначаємо T_{34}.
6. Якщо $T_{12} = T_{34}$, то ідентифікуємо групи з множини $\{pm, pmm, pmg, pgg, p4, p4g, p3\}$.
7. Якщо $T_{12} \neq T_{34}$, то визначаємо T_{45}.
8. Якщо $T_{12} = T_{45}$, то ідентифікуємо групи з множини $\{cmm, p4m, p31m, p3m1, p6\}$.
9. Якщо $T_{12} \neq T_{45}$, то визначаємо T_{56}.
10. Якщо $T_{12} = T_{56}$, то ідентифікуємо групу $p6m$.

У випадку аналізу асиметричних зображень необхідно провести нормалізацію елементарного рисунку, симетризацію зміщень і поворотів в рапорті й симетризацію відстаней між рапортами. Рівняння симетризування (приведення асиметричного зображення до симетричного) буде таке:

$$\mathrm{Im}_s = S_{D_{f(x,y)}} D_{f(x,y)} L_{x,y}(S_{D_{x,y}} D_{x,y} S_{D_{R,\alpha}} D_{R,\alpha} R_n(R_{n-1}(\ldots R_1(N_{D_m} D_m \mathrm{Im}_e)))).$$

Звідси $N_{D_m} = D_m^{-1}$ — нормалізація елементарного рисунку; $S_{D_{x,y}} = D_{x,y}^{-1}$ — симетризація зміщень в рапорті; $S_{D_{R,\alpha}} = D_{R,\alpha}^{-1}$ — симетризація поворотів в рапорті; $S_{D_{f(x,y)}} = D_{f(x,y)}^{-1}$ — симетризація відстаней між рапортами.

5. Експериментальні результати. Для програмної реалізації алгоритмів синтезу і аналізу симетричних та асиметричних зображень використано інтегроване середовище програмування Visual C++Express Edition 2005 та відкриту бібліотеку функцій комп'ютерного зору OpenCV версії 1.0 2006 р. На рис. 1 наведено приклад синтезованого зображення групи смуги $p2$. В результаті спотворення (зсуву елементарних рисунків і їх поворотів в межах рапорту та зміни відстаней між рапортами) отримуємо спотворене зображення, на якому виділяємо характерні точки [14] (рис. 2) та знаходимо коефіцієнти афінних перетворень, на основі яких ідентифікуємо групу симетрії.

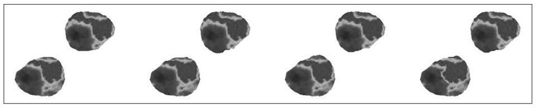

Рис. 1

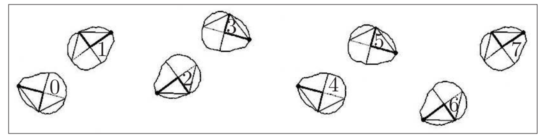

Рис. 2

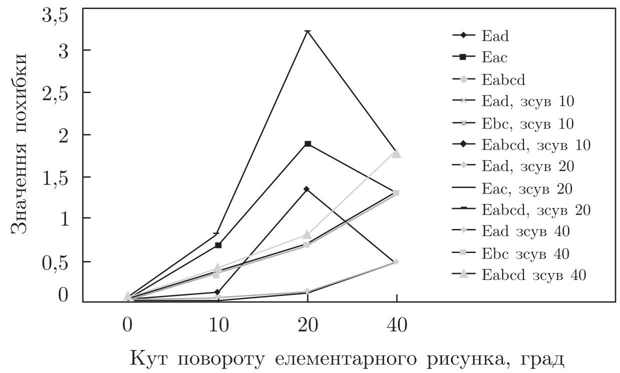

Рис. 3

Величину сумарної абсолютної похибки коефіцієнтів перетворень знайдемо згідно з виразом

$$\varepsilon_G = \sum_{i=1}^{6} |g_i - g_i^*|,$$

де g_i — точне значення коефіцієнтів; g_i^* — обчислене значення коефіцієнтів.

Графік залежності сумарної абсолютної похибки коефіцієнтів перетворень від величини спотворення наведений на рис. 3, де ε_{ad} — сумарне значення абсолютної похибки за коефіцієнтами a, d; ε_{bc} — сумарне значення абсолютної похибки за коефіцієнтами b, c та сумарне значення ε_{abcd} за всіма коефіцієнтами. Як видно з наведеного графіка, спотворення зміщення елементарного рисунка всередині рапорту не істотно впливає на зміну коефіцієнтів a, b, c, d. Поворот елементарного рисунка рапорту більш вагомо впливає на значення коефіцієнтів b, c, ніж на a, d.

Таким чином, симетричні зображення мають надлишковість у своїй структурі. Тому запропоновані методи опису і синтезу дозволяють істотно зменшити обсяги пам'яті для зберігання зображень і ефективного синтезу нових. Крім того, методи і алгоритми аналізу асиметричних зображень дозволяють приводити їх до відомих симетричних структур.

1. *Шубников А. В., Копцик В. А.* Симметрия в науке и искусстве. – Москва: Наука, 1972. – 339 с.
2. *Hertzmann et al.* Image Analogies // Proc. SIGGRAPH. – 2001.
3. *Ebert D. S., Musgrave F. K., Peachey D. et al.* Texturing & Modeling: A Procedural Approach. – San Francisco: Morgan Kaufmann, 2003. – 712 p.
4. *Грицик В. В., Березька К. М., Березький О. М.* Моделювання та синтез складних зображень симетричної структури. – Львів: УАДДНДІІІ, 2005. – 140 с.
5. *Jablan S.* Theory of Symmetry and Ornament. – Belgrade: Mathematical Institute, 1995. – 343 p.
6. *Liu Y., Collins R. T.* A Computational Model for Repeated Pattern Perception Using Frieze and Wallpaper Groups // Proc. Computer Vision and Pattern Recognition Conf. – http://www.ri.cmu.edu/pubs/pub_3302.html, June 2000. – P. 537–544.

7. *Шлезингер М. И.* Математические средства обработки изображений. – Киев: Наук. думка, 1989. – 198 с.
8. *Березький О.* Теоретико-груповий підхід до аналізу та синтезу складних зображень // Матеріали дев'ятої всеукр. міжнар. конф. "Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів". – Київ, 2008. – С. 173–176.
9. *Голод П. І.* Симетрія та методи теорії груп у фізиці. – Київ: ВД "Києво-Могилянська академія", 2005. – 215 с.
10. *Polya G.* Über die Analogie der Kristalsymmetrie in der Ebene // Kristall. – 1924. – **60**. – S. 278–282.
11. *Грицик В. В., Березький О. М., Березька К. М.* Метод опису та синтезу зображень-орнаментів // Доп. НАН України. – 2002. – № 7. – С. 64–71.
12. *Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. – Москва: Наука, 1980. – 240 с.
13. *Роджерс Д., Адамс Дж.* Математические основы машинной графики. – Москва: Мир, 2001. – 604 с.
14. *Березский О. Н.* Алгоритмы анализа и синтеза биомедицинских изображений // Пробл. информатики и управления. – 2007. – № 2. – С. 134–144.

Тернопільський національний економічний університет
Надійшло до редакції 18.03.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. V. Hrytsyk, O. M. Berezsky**

Techniques and algorithms of analysis and synthesis of complex images on the basis of the group-theoretic approach

A group-theoretic approach to image analysis and synthesis is proposed. It allows one to describe, effectively store, analyze, and synthesize different image classes within one theoretical approach. Designed algorithms are implemented in the integrated development environment Visual C++Express Edition with the use of the open computer vision library Open CV.