

Ю. В. Коханенко

Трехмерная устойчивость цилиндра при неоднородном начальном состоянии

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

Розглянута в точній постановці осесиметрична задача стійкості тонкостінного циліндра при осьовому навантаженні. На торцях виконуються в інтегральній формі умови шарнірного закріплення. Наближене відшукування пружних полів (початковий стан, критичні параметри стійкості) здійснюються модифікованим варіаційно-різницевим методом, який використовує базову схему. Наведено приклад розрахунку.

Рассматривается задача о симметричной форме потери устойчивости в изотропном тонкостенном цилиндре при торцевом нагружении цилиндра нагрузкой $\overset{0}{P}_{33}$. На торце $z = Z$ запрещено упругое смещение в направлении оси $0r$ и нагрузка является мертвой. Из равновесия цилиндра для касательного напряжения σ_{13} следует равенство

$$\int_{R_1}^{R_2} \sigma_{13} dr = 0,$$

которое совместно с условием $u(r, Z) = 0$ указывает на то, что на торце $z = Z$ имеет место интегральная форма шарнирного закрепления ($R_2 - R_1 = 2t$ — толщина цилиндра).

К решению задачи привлекается трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) [1]. Расчетная схема представлена на рис. 1.

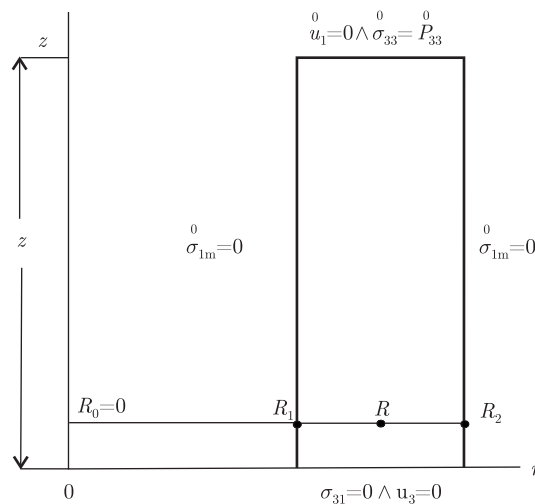


Рис. 1

Начальные напряжения σ_{ij}^0 определяются из уравнения упругости

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\sigma}{11}) + r \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\sigma}{22} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\sigma}{13}) + r \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 0, \quad \boldsymbol{\theta} \in \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (1)$$

при таких граничных условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{1m} &= 0, \quad (r = R_1 \vee r = R_2) \wedge 0 \leq z \leq Z, \\ \frac{\sigma}{31} = 0 \wedge \frac{u}{3} &= 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \wedge z = 0, \\ \frac{u}{1} = 0 \wedge \frac{\sigma}{33} &= P, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \wedge z = Z. \end{aligned} \quad (2)$$

Для определения критических параметров устойчивости привлекается второй вариант ТЛТУДТ. Предполагается, что конструкция находится в условиях простого нагружения. В этом случае задача устойчивости сводится к спектральной задаче, удовлетворяющей следующим соотношениям:

уравнению в вариациях

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(r \sigma_{11}) + r \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} - \sigma_{22} + \lambda \frac{\sigma}{33} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r}(r \sigma_{13}) + r \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + \lambda \frac{\sigma}{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= 0, \quad \boldsymbol{\theta} \in \bar{\Omega}; \end{aligned} \quad (3)$$

граничным условиям

$$\begin{aligned} \sigma_{1m} &= 0, \quad (r = R_1 \vee r = R_2) \wedge 0 \leq z \leq Z, \\ \sigma_{31} = 0 \wedge u_3 &= 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \wedge z = 0, \\ u_1 = 0 \wedge \sigma_{33} + \lambda \frac{P}{33} \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \wedge z = Z. \end{aligned} \quad (4)$$

В (1)–(4) обозначено: $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_3) \equiv (r, z)$; $\bar{\Omega}$ – область, занятая цилиндром; $\mathbf{u} = (u, w) \equiv (u_1, u_3)$ – упругие смещения.

В задаче (1)–(4) отыскивается первое собственное решение $(\lambda_1, \mathbf{u}_1) \equiv (\lambda^*, \mathbf{u}^*)$. Критическая нагрузка $P^{\text{кр}}$ и соответствующая ей форма потери устойчивости $\mathbf{u}^{\text{кр}}$ находятся из равенств

$$P^{\text{кр}} = \lambda^* \frac{P}{33}, \quad \frac{P}{33} = \frac{1}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} \frac{P}{33} dr; \quad \mathbf{u}^{\text{кр}} = \mathbf{u}^*, \quad (5)$$

где $\frac{P}{33}$ – средняя по толщине начальная нагрузка $\frac{P}{33}$ в сечении $z_1 = Z$.

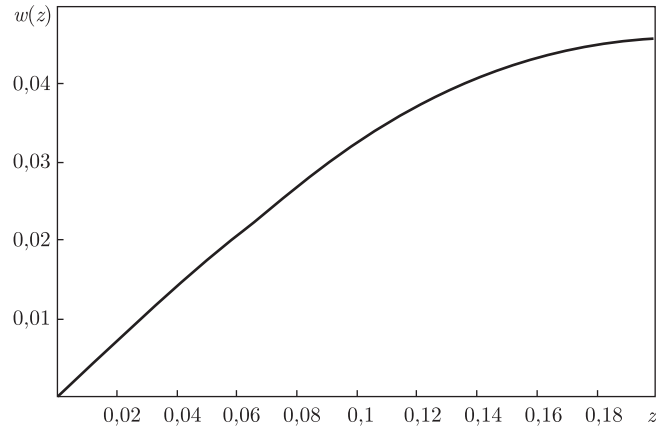


Рис. 2

Приближенное решение задач (1), (2) и (3)–(5) отыскивается модифицированным вариационно-разностным методом, использующим базовую схему [2].

В качестве примера рассматривается задача трехмерной устойчивости цилиндра со следующими характеристиками (рис. 1):

$$E = 200, \quad \nu = 0,25, \quad P^{0\text{CP}} = -1; \quad Z = 0,2, \quad R_1 = 0,99, \quad R_2 = 1,02, \quad R = 1.$$

Технические постоянные и напряжения измеряются в ГПа. Линейные размеры нормируются величиной среднего сечения цилиндра $r = R$.

В результате расчетов найдена критическая нагрузка $P^{\text{KP}} = 3,626$ и соответствующая ей компонента w^{KP} собственной функции \mathbf{u}^{KP} , представляющая собой форму потери устойчивости в среднем сечении $r = R$ цилиндра (рис. 2).

1. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – Киев: Вища шк., 1986. – 512 с.
2. Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 1. Статика материалов / Под ред. В. Т. Головчана. – Киев: Наук. думка, 1993. – 454 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 06.05.2008

Yu. V. Kokhanenko

The three-dimensional stability of a cylinder on the heterogeneous initial state

The axisymmetric problem on the stability of a thin-walled cylinder under an axial loading is considered in the exact statement. On its ends, the conditions of a hinging are satisfied. The field of elastic strains and the critical parameters of stability are determined within the modified variation-difference method which uses the base scheme. An example of calculations is presented.